

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΟΛΗ Η ΥΛΗ

Εισηγητής : Τσολάκος Γιώργος

Ημερομηνία: 29/03/26

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$ (μονάδες 6)
- A2.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγωγη της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$. (μονάδες 5)
- A3. α.** Πότε μια συνάρτηση f καλείτε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;
β. Πότε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ καλείται σημείο καμπής μιας C_f ;
γ. Πότε μια ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ καλείται πλάγια ασύμπτωτη μιας C_f στο $+\infty$. (μονάδες 4)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
α. Αν η f είναι κυρτή στο Δ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . ☐ Σ ☐ Λ
β. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\alpha - \beta)$ ☐ Σ ☐ Λ
γ. Η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$ με $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = (x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ ☐ Σ ☐ Λ
δ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα (α, β) τότε το $f(A)$ θα είναι της μορφής (B, A) όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ ☐ Σ ☐ Λ
ε. Μια συνάρτηση f είναι $1 - 1$ αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τεταγμένη. ☐ Σ ☐ Λ (μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους

$$f(x) = \frac{(\alpha + 1)x^2 + x - 1}{x - \alpha^2} \text{ και } g(x) = \frac{\alpha x^3 + x^2 + (\alpha + 1)x - 1}{x - \alpha} \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}$$

B1. Να υπολογίσετε την τιμή α , αν $f = g$. (7 Μονάδες)

B2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f που άγεται από το σημείο $A(0, -1)$ (6 Μονάδες)

B3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως μονότονη, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

(8 Μονάδες)

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

(4 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + (f'(x))^2 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $f(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3},$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = \sqrt{3}$

Γ1. Να δείξετε ότι $f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

(Μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{2e^{-x} + 1}, x \in \mathbb{R}.$

(Μονάδες 8)

Γ3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την $f^{-1}.$

(Μονάδες 5)

Γ4. Να υπολογίσετε το $\int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{f^2(x)} dx.$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γνήσια μονότονη, δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$$f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \geq 1 \text{ και } \frac{f(x) + e^x}{x} \leq e^x \text{ για } x > 0$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα την $x=1$ και ότι είναι γνήσια αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(6 Μονάδες)

Δ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = ex - e.$

Ισχύει επιπλέον ότι $x^2 f''(x) + e^x = x^2 f'(x) + xe^x$ για κάθε $x > 0$

(6 Μονάδες)

Δ3. Να δειχτεί ότι η $f(x) = e^x \ln x, x > 0$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(8 Μονάδες)

Δ4. Αν η εφαπτομένη της f $A(1, f(1))$ και η C_ξ έχουν και άλλο κοινό σημείο με τετμημένη

$$x_0 \in (0, 1) \text{ να δείξετε ότι υπάρχει } \xi \in (x_0, 1) \text{ ώστε να ισχύει } f(\xi) + \frac{e^\xi}{\xi} = e.$$

(5 Μονάδες)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σελ 142-143 Σχολικό (Θ. Fermat)

A2. Απόδειξη σελ 216-217 Σχολικό (Θ. ολοκληρωτικού λογισμού)

A3.

- i. Ορισμός σελ 185 Σχολικό
- ii. Ορισμός σελ 157 Σχολικό
- iii. Ορισμός σελ 162 Σχολικό

A4.

- i. ΛΑΘΟΣ
- ii. ΛΑΘΟΣ
- iii. ΣΩΣΤΟ
- iv. ΛΑΘΟΣ
- v. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

B1. Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδία ορισμού τα $D_f = \mathbb{R} - \{\alpha^2\}$ και $D_g = \mathbb{R} - \{\alpha\}$. Για να είναι ίσες πρέπει $D_f = D_g$ οπότε πρέπει: $\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\alpha = 1$

Για $\alpha=1$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}, x \neq 1 \text{ και } g(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x - 1}{x - 1}, x \neq 1$$

Οι οποίες προφανώς δεν είναι ίσες.

Για $\alpha=0$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x}, \text{ με } x \neq 0 \text{ και } g(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x}, x \neq 0$$

Οι οποίες έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f(x) = g(x)$, οπότε $f = g$.

Άρα η τιμή του $\alpha=0$ είναι δεκτή.

B2. Είναι $f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = x + 1 - \frac{1}{x}$ οπότε $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο της C_f , τότε η εξίσωση εφαπτομένης της στο M είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Για να διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$ Πρέπει:

$$-1 - x_0 - 1 + \frac{1}{x_0} = \left(1 + \frac{1}{x_0^2}\right)(0 - x_0) \Leftrightarrow -2 - x_0 + \frac{1}{x_0} = -x_0 - \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow \frac{2}{x_0} = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Επομένως, η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

- B3.** Είναι: $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \neq 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα και στο $(0, +\infty)$ και δεν έχει ακρότατα. Επίσης, $f''(x) = -\frac{2}{x^3}$ άρα ο πίνακας μεταβολών της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+		-
f	↗		↘

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0)$ και κοίλη στο $(0, +\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

- B4.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R} - \{0\}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x - 1}{x} = -\infty$$

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Επομένως, η ευθεία $y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και όμοια στο $-\infty$

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} \Leftrightarrow f(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} \geq 0. \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$, με $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι:

$$g(0) = f(0) - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$(1) \Leftrightarrow g(x) \geq g(0).$$

Δηλαδή η g παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο.

Επίσης το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$g'(x) = \left(f(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} \right)' = f'(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Leftrightarrow f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Γ2. 1ος τρόπος

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + (f'(x))^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + f'(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ f(x) \cdot f''(x) + f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ (f(x) \cdot f'(x))' + f(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ e^x (f(x) \cdot f'(x))' + e^x \cdot f(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ e^x (f(x) \cdot f'(x))' + (e^x)' \cdot f(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ (e^x \cdot f(x) \cdot f'(x))' &= 0 \end{aligned}$$

2ος τρόπος

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + (f'(x))^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + f'(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ e^x \cdot f(x) \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) \cdot f''(x) + e^x \cdot f'(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ (e^x)' \cdot f(x) \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) \cdot (f'(x))' + e^x \cdot f'(x) \cdot f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ (e^x \cdot f(x) \cdot f'(x))' &= 0 \end{aligned}$$

Με εφαρμογή των Συνεπειών του Θεωρήματος Μέσης Τιμής προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$e^x \cdot f(x) \cdot f'(x) = c_1.$$

Για $x = 0$, έχουμε:

$$e^0 \cdot f(0) \cdot f'(0) = c_1 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$e^x \cdot f(x) \cdot f'(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = -2e^{-x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (2e^{-x})'.$$

Με εφαρμογή των Συνεπειών του Θεωρήματος Μέσης Τιμής προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f^2(x) = 2e^{-x} + c_2.$$

Για $x = 0$, έχουμε:

$$f^2(0) = 2e^0 + c_2 \Leftrightarrow 3 = 2 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f^2(x) = 2e^{-x} + 1 \neq 0.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $f(0) = \sqrt{3} > 0$, θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως:

$$f(x) = \sqrt{2e^{-x} + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

Γ3. 1ος τρόπος

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{2e^{-x_1} + 1} = \sqrt{2e^{-x_2} + 1} \Leftrightarrow$$

$$2e^{-x_1} + 1 = 2e^{-x_2} + 1 \Leftrightarrow 2e^{-x_1} = 2e^{-x_2} \Leftrightarrow$$

$$e^{-x_1} = e^{-x_2} \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι 1-1 συνάρτηση, οπότε αντιστρέφεται.

2ος τρόπος

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = \left(\sqrt{2e^{-x} + 1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2e^{-x} + 1}}(2e^{-x} + 1)' = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{2e^{-x} + 1}} < 0, \quad \text{για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}.$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και 1-1 συνάρτηση, συνεπώς αντιστρέφεται.

Θέτουμε $y = f(x)$ και έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{2e^{-x} + 1} \quad (1)$$

Θα πρέπει $y \geq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$y^2 = 2e^{-x} + 1 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 2e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{y^2 - 1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Θα πρέπει } \frac{y^2 - 1}{2} > 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 > 0 \stackrel{y > 0}{\Leftrightarrow} y > 1.$$

Με αυτόν τον επιπλέον περιορισμό έχουμε:

$$\ln e^{-x} = \ln \left(\frac{y^2 - 1}{2} \right) \Leftrightarrow -x = \ln \left(\frac{y^2 - 1}{2} \right) \Leftrightarrow x = -\ln \left(\frac{y^2 - 1}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$x = \ln \left(\frac{y^2 - 1}{2} \right)^{-1} \Leftrightarrow x = \ln \left(\frac{2}{y^2 - 1} \right) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln \left(\frac{2}{y^2 - 1} \right), y > 1$$

Άρα είναι:

$$f^{-1}(x) = \ln \left(\frac{2}{x^2 - 1} \right), x > 1.$$

Υποσημείωση: Το σύνολο τιμών της f , το οποίο είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} , μπορεί να βρεθεί από την συνέχεια και την μονοτονία της f .

Γ4. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{f^2(x)} dx$.

Έχουμε:

$$I = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{f^2(x)} dx = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{2e^{-x} + 1} dx = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{\frac{2}{e^x} + 1} dx = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{\frac{2 + e^x}{e^x}} dx = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x(e^x + 1)}{e^x + 2} dx$$

Θέτουμε $e^x = u$, οπότε $e^x dx = du$.

Επίσης $e^x + 1 = u + 1 > 0$ και $e^x + 2 = u + 2 > 0$.

Για $x = \ln(e-2)$ είναι $u = e^{\ln(e-2)} = e-2$.

Για $x = 0$ είναι $u = e^0 = 1$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} I &= \int_{e-2}^1 \frac{u+1}{u+2} du = \int_{e-2}^1 \frac{u+2-1}{u+2} du = \int_{e-2}^1 \left(1 - \frac{1}{u+2} \right) du = \\ &= [u]_{e-2}^1 - [\ln(u+2)]_{e-2}^1 = 1 - (e-2) - (\ln 3 - \ln(e-2+2)) = \\ &= 1 - e + 2 - \ln 3 + \ln e = 4 - e - \ln 3. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f(1) \geq 0$ και από $\frac{f(x) + e^x}{x} \leq e^x$ με $x=1$ προκύπτει ότι $f(1) \leq 0$ άρα $f(1)=0$ και αφού είναι γνήσια μονότονη άρα " $1-1$ " οπότε μοναδική ρίζα $x=1$. Αν τώρα η f είναι γνήσια φθίνουσα τότε για $x > 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 0$ άτοπο αφού $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$, επομένως η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Δ2. Ισχύει ότι $\frac{f(x) + e^x}{x} \leq e^x \Leftrightarrow f(x) + e^x - xe^x \leq 0$ για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε $g(x) = f(x) + e^x - xe^x \leq 0 = g(1)$ και από Fermat $g'(1)=0 \Rightarrow \dots \Rightarrow f'(1)=e$ Και η επαπτομένη είναι $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = ex - e$

Δ3. Από $x^2 f''(x) + e^x = x^2 f'(x) + xe^x \Leftrightarrow x^2 (f''(x) - f'(x)) = xe^x - e^x$ ισοδύναμα με $x > 0$ είναι

$$f''(x) - f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} \Leftrightarrow (f'(x) - f(x))' = \left(\frac{e^x}{x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) - f(x) = \frac{e^x}{x} + c \text{ και είναι } f'(1) - f(1) = e + c \Rightarrow c = 0$$

$$f'(x) - g(x) = \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = \ln x + c \text{ για } x=1 \Rightarrow c=0 \text{ έτσι } f(x) = e^x \ln x, x > 0$$

$$\text{και το σύνολο τιμών } f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

Δ4. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ για την f στο διάστημα $[x_0, 1]$ υπάρχει $\xi \in (x_0, 1)$ ώστε να

$$\text{ισχύει } f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} \text{ ή αφού } f(x_0) = ex_0 - e \text{ είναι } f'(\xi) = \frac{ex_0 - e}{x_0 - 1} \text{ και επειδή}$$

$$f'(x) = f(x) + \frac{e^x}{x} \text{ έχουμε ότι } f(\xi) + \frac{e^\xi}{\xi} = e.$$