

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΕΝΟΤΗΤΑ: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ – ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ –
ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**

Εισηγητής : Τσολάκος Γιώργος

Ημερομηνία: 29-03-26

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με ένα πολυώνυμο της μορφής $x - \rho$ ισούται με την αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = \rho$.
(09 Μονάδες)
- A2.** α. Πότε δύο μη μηδενικά πολυώνυμα είναι ίσα;
β. Πώς ορίζεται η εκθετική συνάρτηση με βάση το a ;
(04 Μονάδες)
- A3.** Να διατυπώσετε την ταυτότητα της διαίρεσης πολυωνύμων.
(02 Μονάδες)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
α. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $0 < a < 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.
γ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με: $f(x) = \phi(x - c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της ϕ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.
δ. Κάθε πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές έχει πάντα ρίζα έναν τουλάχιστον από τους ακέραιους διαιρέτες του σταθερού όρου του.
ε. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ είναι όλο το $\mathbb{R}$.
(10 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

B1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+4} = (\sqrt{27})^{2x+6}$

β. $2^{x+3} - 2^{x+2} + 2^{x+1} = 48$

γ. $e^{2x} - (1+e) \cdot e^x + e = 0$

(12 Μονάδες)

B2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x - 3^{x+\alpha} - 2^{x+2} - 2^{x-1}$ τέμνει τον άξονα y' στο σημείο με τεταγμένη $-\frac{65}{18}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$

(02 Μονάδες)

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x' .
(04 Μονάδες)

γ. Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{x^3+x^2f(2)} \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{f(3)-23x}$

(07 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - \beta x + 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ έχει μια αρνητική ακέραια ρίζα και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x - 1$ είναι 6.

α. Να βρείτε τα α και β .

(06 Μονάδες)

β. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$

(06 Μονάδες)

γ. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x^3 - 1} > 2$

(06 Μονάδες)

δ. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{P(x) - x^3} - x = x + 1$

(07 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} \eta\mu^2\theta \cdot x - \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι το (Σ) έχει μοναδική λύση.

(05 Μονάδες)

β. Αν (x_0, y_0) η μοναδική λύση του (Σ) να αποδείξετε ότι $x_0 \cdot y_0 < 0$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$

(04 Μονάδες)

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$B = \left[\frac{2\eta\mu^2(\pi - \theta) + 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi + \theta)}{\eta\mu\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right)} + 2\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \sigma\upsilon\nu(2\pi + \theta) + 4\eta\mu\frac{3\pi}{4} + \epsilon\phi^2\left(13\pi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

(09 Μονάδες)

δ. Αν $B = (4 - \sqrt{2})\sigma\upsilon\nu\theta + 2\sqrt{2} + 3$ να λυθεί η εξίσωση $x_0 - y_0 = B$ στο διάστημα

$$\left(\frac{5\pi}{2}, 7\pi\right]$$

(07 Μονάδες)

Ευχές για επιτυχία!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Βλέπουμε Απόδειξη σελ 134 Σχολικού βιβλίου
A2. α) Βλέπε σελ 129 Σχολικού βιβλίου
 β) Βλέπε σελ 129 Σχολικού βιβλίου
A3. Βλέπε θεώρημα σελ 132 Σχολικού βιβλίου
A4. α) ΛΑΘΟΣ
 β) ΣΩΣΤΟ
 γ) ΣΩΣΤΟ
 δ) ΛΑΘΟΣ
 ε) ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

$$\begin{aligned}
 \text{B1. α)} \quad \left(\frac{1}{9}\right)^{x+4} &= (\sqrt{27})^{2x+6} \Rightarrow \left(\frac{1}{3^2}\right)^{x+4} = (\sqrt{27})^{2 \cdot (x+3)} \Rightarrow \\
 (3^{-2})^{x+4} &= \left[\left(\sqrt{27}\right)^{\cancel{2}}\right]^{x+3} \Rightarrow 3^{-2(x+4)} = 27^{x+3} \Rightarrow \\
 \Rightarrow 3^{-2x-8} &= (3^3)^{x+3} \Rightarrow 3^{-2x-8} = 3^{3x+9} \Rightarrow -2x-8 = 3x+9 \Rightarrow \\
 \Rightarrow -8-9 &= 3x+2x \Rightarrow 5x = -17 \Rightarrow x = -\frac{17}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{β)} \quad 2^{x+3} - 2^{x+2} + 2^{x+1} &= 48 \Rightarrow 2^x \cdot 2^3 - 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^1 = 48 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 8 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x &= 48 \Rightarrow 6 \cdot 2^x = 48 \Rightarrow 2^x = \frac{48}{6} \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow \\
 2^x &= 2^3 \Rightarrow x = 3
 \end{aligned}$$

$$\text{γ)} \quad e^{2x} - (1+e) \cdot e^x + e = 0 \Rightarrow (e^x)^2 - (1+e) \cdot e^x + e = 0 \quad (1)$$

$$\text{Θέτουμε } e^x = \omega \text{ με } \omega > 0 \text{ οπότε η (1) } \Rightarrow \omega^2 - (1+e) \cdot \omega + e = 0$$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(1+e)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot e = (1+e)^2 - 4e = 1 + 2e + e^2 - 4e = \\
 &= e^2 - 2e + 1 = (e-1)^2 > 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-[-(1+e)] \pm \sqrt{(e-1)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{(1+e) \pm (e-1)}{2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} \frac{1+e-e+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 > 0 \text{ ΔΕΚΤΗ} \\ \frac{1+e+e-1}{2} = \frac{2e}{2} = e > 0 \text{ ΔΕΚΤΗ} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Άρα

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 1 \\ \text{ή} \\ \omega = e \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x = 1 \\ \text{ή} \\ e^x = e \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x = e^0 \\ \text{ή} \\ e^x = e^1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ή} \\ x=1 \end{array} \right.$$

B2. α) Η C_f τέμνει τον άξονα $y'g$ στο $-\frac{65}{18}$ δηλαδή για $x=0$ είναι $y = -\frac{65}{18}$.

$$\text{Τότε } f(x) = y \Rightarrow f(0) = -\frac{65}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^0 - 3^{0+\alpha} - 2^{0+2} - 2^{0-1} = -\frac{65}{18} \Rightarrow 3^0 - 3^\alpha - 2^2 - 2^{-1} = -\frac{65}{18} \Rightarrow$$

$$1 - 3^\alpha - 4 - \frac{1}{2} = -\frac{65}{18} \Rightarrow 2 - 2 \cdot 3^\alpha - 8 - 1 = -\frac{65}{9} \Rightarrow$$

$$-7 - 2 \cdot 3^\alpha = -\frac{65}{9} \Rightarrow \frac{65}{9} - 7 = 2 \cdot 3^\alpha \Rightarrow \frac{65}{9} - \frac{63}{9} = 2 \cdot 3^\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9} = 2 \cdot 3^\alpha \Rightarrow \frac{1}{9} = 3^\alpha \Rightarrow 3^\alpha = \frac{1}{3^2} \Rightarrow 3^\alpha = 3^{-2} \Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

$$\text{Τότε για } \alpha = -2 \text{ η } f(x) = 3^x - 3^{x-2} - 2^{x+2} - 2^{x+1}$$

β) Για να τέμνει η C_f τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow$

$$3^x - 3^{x-2} - 2^{x+2} - 2^{x-1} = 0 \Rightarrow 3^x - 3^x \cdot 3^{-2} = 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^{-1} \Rightarrow$$

$$3^x - 3^x \cdot \frac{1}{3^2} = 4 \cdot 2^x + 2^x \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 3^x - \frac{3^x}{9} = 4 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{9 \cdot 3^x - 3^x}{9} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2^x + 2^x}{2} \Rightarrow \frac{8 \cdot 3^x}{9} = \frac{9 \cdot 2^x}{2} \Rightarrow 2 \cdot 8 \cdot 3^x = 9 \cdot 9 \cdot 2^x \Rightarrow$$

$$16 \cdot 3^x = 81 \cdot 2^x \Rightarrow \frac{3^x}{2^x} = \frac{81}{16} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3^4}{2^4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $\boxed{M(4,0)}$

$$\gamma) \text{ Είναι } f(2) = 3^2 - 3^{2-2} - 2^{2+2} - 2^{2-1} = 9 - 3^0 - 2^4 - 2^1 = 9 - 1 - 16 - 2 = -10$$

$$\text{άρα } f(2) = -10$$

$$\text{και } f(3) = 3^3 - 3^{3-2} - 2^{3+2} - 2^{3-1} = 3^3 - 3^1 - 2^5 - 2^2 = 27 - 3 - 32 - 4 = -12$$

$$\text{άρα } f(3) = -12$$

$$\text{Τότε: } \left(\frac{n}{4}\right)^{x^3+x^2 f(2)} \leq \left(\frac{4}{n}\right)^{f(3)-23x} \Rightarrow \left(\frac{n}{4}\right)^{x^3-10x^2} \leq \left(\frac{4}{n}\right)^{-12-23x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n}{4}\right)^{x^3-10x^2} \leq \left[\left(\frac{n}{4}\right)^{-1}\right]^{-12-23x} \Rightarrow \left(\frac{n}{4}\right)^{x^3-10x^2} \leq \left(\frac{n}{4}\right)^{12+23x} \quad \begin{array}{l} n < 4 \Rightarrow \frac{n}{4} < 1 \\ \alpha^x \searrow 0 < \alpha < 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 10x^2 \geq 23x + 12 \Rightarrow x^3 - 10x^2 - 23x - 12 \geq 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 10x^2 - 23x - 12$. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ είναι οι διαιρετές του σταθερού όρου $\alpha_0 = -12$ δηλαδή οι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

Με σχήμα Horner έχουμε :

1	-10	-23	-12
$\searrow$	-1	11	12
1	-11	-12	0

$p = -1$

Τότε η ταυτότητα της διαίρεσης γίνεται:

$$\Delta(x) : \delta(x) \cdot \eta(x) \Rightarrow$$

$$P(x) = [x - (-1)] \cdot (x^2 - 11x - 12) = (x + 1)(x^2 - 11x - 12)$$

Για τις ρίζες του $P(x)$ έχουμε:

- $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

- $x^2 - 11x - 12 = 0$

με $\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 121 + 48 = 169 > 0$

$$\text{Άρα } x_{1,2} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm 13}{2} = \begin{cases} \frac{-2}{2} = -1 & x = -1 \\ \frac{24}{2} = 12 & x = 12 \end{cases} \quad \text{δηλ. ή}$$

Κάνουμε πίνακα ριζών και προσήμων για τους παράγοντες του $p(x)$

x	$-\infty$	-1	12	$+\infty$
$x + 1$	—	○	+	+
$x^2 - 11x - 12$	+	○	—	+
$\Gamma = P(x)$	—	○	—	+

$$\text{Από (1)} \Rightarrow \Gamma \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \in \{-1\} \cup [12, +\infty)}$$

ΘΕΜΑ Γ

α) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ είναι διαιρετές του σταθερού όρου $\alpha_0 = 1$ δηλ. οι ± 1 .

Αφού το $P(x)$ έχει μια αρνητική ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι η $x = -1$. Τότε θα ισχύει

$$P(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + \alpha(-1)^2 - \beta(-1) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = -\alpha} \quad (1)$$

Στη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ ο διαιρέτης $\delta(x) = x-1$ είναι της μορφής $x-p$ με $p=1$.

Από γνωστό θεώρημα για το υπόλοιπο της διαίρεσης ισχύει

$$P(p) = U \Rightarrow P(1) = 6 \Rightarrow 1^3 + \alpha \cdot 1^2 - \beta \cdot 1 + 1 = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \alpha - \beta + 1 = 6 \Rightarrow \alpha - \beta = 6 - 2 \Rightarrow \alpha - \beta = 4 \xrightarrow{(1)} \alpha - (-\alpha) = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2} \text{ και από (1) } \Rightarrow \boxed{\beta = -2}$$

$$\text{Άρα } P(x) = x^3 + 2x^2 - (-2)x + 1 \Rightarrow P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

$$\beta) P(x) > 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + 2x + 1 > 0 \Rightarrow x^3 + 1^3 + 2x^2 + 2x > 0$$

$$(x+1)(x^2 - x + 1) + 2x(x+1) > 0 \Rightarrow (x+1) \cdot (x^2 - x + 1 + 2x) > 0 \Rightarrow$$

$$(x+1) \cdot (x^2 + x + 1) > 0 \quad (2)$$

Βρίσκουμε τις ρίζες των παραγόντων του γινομένου :

- $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

- $x^2 + x + 1 = 0$ ΑΔΥΝΑΤΗ γιατί $\Delta = -3 < 0$

Κάνουμε πίνακα ριζών και προσήμων για τους παράγοντες των γινομένων :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	-	○	+
x^2+x+1	+	+	+
$\Gamma = P(x)$	-	○	+

$$\text{Από (2)} \Rightarrow \Gamma > 0 \Rightarrow \boxed{x > -1}$$

γ)

$$\frac{P(x)}{x^3+1} > 2 \Rightarrow \frac{(x+1) \cdot (x^2+x+1)}{(x+1) \cdot (x^2-x+1)} > 2 \Rightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} > 2 \quad \begin{matrix} x \neq -1 \\ x+1 \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{x^2+x+1-2(x^2-x+1)}{x^2-x+1} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2+x+1-2x^2+2x-2}{x^2-x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2+3x-2}{x^2-x+1} > 0 \quad (2)$$

Πρέπει $x^2 - x + 1 \neq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\Delta = -3 < 0$

$$\text{Από } (2) \Rightarrow (-x^2 + 3x - 2)(x^2 - x + 1) > 0 \quad (3)$$

$$\text{Τότε } -x^2 + 3x - 2 = 0 \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ή} \\ x = 2 \end{cases}$$

Κάνουμε πίνακα ριζών και προσήμων για τους παράγοντες του γινομένου της (3)

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$-x^2 + 3x + 2$	-	○	+	○	-
$x^2 - x + 1$	+	+	+	+	
$\Gamma = P(x)$	-	○	+	○	-

$$\text{Από } (3) \Rightarrow \Gamma > 0 \Rightarrow \boxed{x \in (1, 2)}$$

δ) Θεωρούμε την εξίσωση

$$\sqrt{P(x) - x^3} - x = x + 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x^2 + 2x + 1 - x^2} = x + x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2x + 1 \quad (3)$$

Για να ορίζεται η εξίσωση (3) πρέπει :

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ αφού } \Delta = -4 < 0 \text{ και } \alpha = 2 > 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow \boxed{x \geq -\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\text{Από (3)} \Rightarrow \left(\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)^2 = (2x + 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow$$

$$0 = 4x^2 + 4x - 2x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \text{ή} \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} > -\frac{1}{2} \text{ ΔΕΚΤΗ} \\ \text{ή} \\ \boxed{x=-1} < -\frac{1}{2} \text{ ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ} \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $\boxed{x=0}$

ΘΕΜΑ Δ

Α) Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y του (Σ)

$$D = \begin{vmatrix} \eta\mu^2\theta & -\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \eta\mu^2\theta - 1(-\sigma\upsilon\nu^2\theta) = \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1(-\sigma\upsilon\nu^2\theta) = 2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \eta\mu^2\theta & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \eta\mu^2\theta - 1 \cdot 2 = \eta\mu^2\theta - 2$$

Αφού $D=1 \neq 0$ το (Σ) έχει μοναδική λύση

β) Η μοναδική λύση του (Σ) είναι η

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{1}, \frac{\eta\mu^2\theta - 2}{1} \right) = (2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta, \eta\mu^2\theta - 2)$$

$$\text{Τότε } x_0 \cdot y_0 = (2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta)(\eta\mu^2\theta - 2) = (2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta)(1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta - 2) =$$

$$= (2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta)(-\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1) = -(1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta)(2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta) < 0$$

Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ αφού $1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ και $2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$

γ) Απλοποιούμε τον κάθε όρο της παράστασης Β

- $\eta\mu(\pi - \theta) = \eta\mu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta$
- $\eta\mu\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(2\pi + \pi - \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- $\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\eta\mu\frac{3\pi}{4} = -\eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu(2\pi + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$
- $\eta\mu\frac{3\pi}{4} = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\epsilon\phi\left(13\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \epsilon\phi\left(12\pi + \pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \epsilon\phi\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \epsilon\phi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$$\text{Τότε } B = \left[\frac{2\eta\mu^2\theta + 2(-\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{\frac{1}{2}} + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + 4\frac{\sqrt{2}}{2} + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow$$

$$B = \left[\frac{2\eta\mu^2\theta + 2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \right] \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + 2\sqrt{2} + 3 \Rightarrow$$

$$B = \left[\frac{2(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta)}{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \right] \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + 2\sqrt{2} + 3 \Rightarrow$$

$$B = \left(\frac{2 \cdot 1}{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \right) \sigma\upsilon\nu\theta + 2\sqrt{2} + 3 \Rightarrow \boxed{B = (4 - \sqrt{2}) \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + 2\sqrt{2} + 3}$$

δ) Θεωρούμε την εξίσωση : $x_0 - y_0 = B \stackrel{(B)}{\Rightarrow}$

$$2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta - (\eta\mu^2\theta - 2) = (4 - \sqrt{2})\sigma\upsilon\nu\theta + 2\sqrt{2} + 3 \Rightarrow$$

$$2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta + 2 = (4 - \sqrt{2})\sigma\upsilon\nu\theta + 2\sqrt{2} + 3 \Rightarrow$$

$$4 + \sigma\upsilon\nu^2\theta - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta) = (4 - \sqrt{2})\sigma\upsilon\nu\theta + 2\sqrt{2} + 3 \Rightarrow$$

$$4 - 1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = (4 - \sqrt{2})\sigma\upsilon\nu\theta + 2\sqrt{2} + 3 \Rightarrow$$

$$3 + 2\sigma\upsilon\nu^2\theta = (4 - \sqrt{2})\sigma\upsilon\nu\theta + 2\sqrt{2} + 3 \Rightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^2\theta + (\sqrt{2} - 4)\sigma\upsilon\nu\theta - 2\sqrt{2} = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu\theta = \omega$ με $-1 \leq \omega \leq 1$ οπότε η (1) γίνεται :

$$\text{Τότε } \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(\sqrt{2}-4) \pm \sqrt{(\sqrt{2}-4)^2}}{2 \cdot 2} = \frac{-(\sqrt{2}-4) \pm (\sqrt{2}+4)}{4} =$$

$$\begin{cases} \frac{4 - \sqrt{2} - \sqrt{2} - 4}{4} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{ΔΕΚΤΗ} \\ \frac{4 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 4}{4} = \frac{8}{4} = 2 & \text{ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ} \end{cases}$$

$$\text{Τότε } \omega = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{συν}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{συν}\theta = -\text{συν}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{συν}\theta = \text{συν}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \text{συν}\theta = \text{συν}\frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \theta = 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{4} \\ \text{ή} \\ \theta = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Όμως } x \in \left(\frac{5\pi}{2}, 7\pi\right] \text{ δηλ } \frac{5\pi}{2} < \theta \leq 7\pi \xRightarrow{(2)} \begin{cases} \frac{5\pi}{2} < 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{4} \leq 7\pi \\ \frac{5\pi}{2} < 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \leq 7\pi \end{cases} \xRightarrow{(3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} \leq 2\kappa\pi \leq 7\pi + \frac{3\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} \leq 2\kappa\pi \leq 7\pi - \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{13\pi}{4} < 2\kappa\pi \leq \frac{31\pi}{4} \\ \frac{7\pi}{4} < 2\kappa\pi \leq \frac{25\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{13}{8} < \kappa < \frac{31}{8} \\ \frac{7}{8} < \kappa \leq \frac{25}{8} \end{cases} \xRightarrow{\kappa \in \mathbb{Z}} \begin{cases} \kappa = 2 \text{ ή } \kappa = 3 \\ \kappa = 1 \text{ ή } \kappa = 2 \end{cases}$$

$$\text{Για } \kappa = 2 \text{ από (2)} \Rightarrow \theta_1 = 4\pi - \frac{1\pi}{4} \Rightarrow \theta_1 = \frac{13\pi}{4}$$

$$\kappa = 3 \text{ από (2)} \Rightarrow \theta_2 = 6\pi - \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta_2 = \frac{21\pi}{4}$$

$$\text{Για } \kappa = 1 \text{ από (3)} \Rightarrow \theta_3 = 2\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta_3 = \frac{11\pi}{4}$$

$$\kappa = 2 \text{ από (3)} \Rightarrow \theta_4 = 4\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta_4 = \frac{19\pi}{4}$$