

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΠΑ.Λ.**

Εισηγητής: Παπαδάκης Γιώργος
Τμήμα: Γ ΕΠΑ.Λ.

ΘΕΜΑ Α

- A1.** α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
(μονάδες 3)
- β) Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα μιας μεταβλητής;
(μονάδες 2)
- γ) Ποιες μεταβλητές λέγονται ποιοτικές; Ποιες λέγονται ποσοτικές και σε τι διακρίνονται;
(μονάδες 3)
- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.
- α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathcal{R}$, τότε ισχύει:
 $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- β) Η συχνότητα μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές.
- γ) Ο τύπος που εφαρμόζεται στα κυκλικά διαγράμματα για να καθοριστεί η γωνία είναι $\alpha_i = \frac{v_i}{v} 360^\circ$.
- δ) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+6}{3}$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=3$.
- ε) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.
(μονάδες 10)
- A3.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $F(x)=cf(x)$ είναι ίση με $F'(x)=cf'(x)$.
(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
(μονάδες 3)
- β) Να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
(μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της f σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.
(μονάδες 8)
- δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008$.

- α) Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος f' της f . (μονάδες 5)
- β) Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (μονάδες 12)
- γ) Να δειχθεί ότι $f(x) \geq 2008$, για κάθε πραγματικό αριθμό x , όπου $x \in [1, +\infty)$ (μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Οι τιμές πέντε βιβλίων σε ευρώ είναι: 8, $12+\alpha$, 20, $10+\alpha$, 16, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ με

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2x - 4}$$

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$. (μονάδες 3)
- β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων. (μονάδες 3)
- γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο και το εύρος των παρατηρήσεων. (μονάδες 4)

Δ2. Οι χρόνοι τους οποίους έκαναν μια ομάδα 50 μαθητών για να λύσουν ένα πρόβλημα είναι από 10 ως 20 sec χωρισμένοι σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Κλάσεις	κ_i	ν_i	N_i	f_i	$f_i \%$	$F_i \%$
[10,)		6				
[,)						
[,)		8				
[,)				0,3		
[,)		12				
σύνολο						

(μονάδες 7)

- β) Να κάνετε
- i) το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων. (μονάδες 4)
- ii) το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων%. (μονάδες 4)

Ευχές για επιτυχία

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** α) Θεωρία σχολικό σελ.22.
β) Θεωρία σχολικό σελ.65.
γ) Θεωρία σχολικό σελ.58,59.

A2. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ.

A3. Θεωρία σχολικό σελ.30.

ΘΕΜΑ Β

α) πρέπει $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

άρα $A_f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \frac{(-1)^2 + 3(-1) - 10}{-1 - 2} = \frac{1 - 3 - 10}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+5) = 7$$

Το $x^2 + 3x - 10$ έχει $a=1$, $\Delta=9+40=49$ και ρίζες τις 2 και -5.

$$\text{Άρα } x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$$

$$\gamma) f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = x+5$$

$$\text{Άρα } f'(x) = (x+5)' = 1 = \epsilon\phi 45 = \lambda$$

Οπότε για κάθε $x \in A_f$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.

$$\delta) \text{ Είδαμε στο } (\gamma) \text{ ότι } f'(x) = (x+5)' = 1 > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2)$ και γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

Και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

ΘΕΜΑ Γ

α) Ισχύει: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

στο οποίο είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
και παραγωγίζεται ως πολυώνυμο με

$$f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

β) Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Το $x^2 - 4x + 3$ έχει $a=1$, $\Delta=16-12=4$ και ρίζες τις 1 και 3.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'(x)		+	-	+
f(x)		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

τ.μ τ.ελ.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$ το

$$f(1) = \frac{1}{3} + 2009 = \frac{6028}{3}$$

και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 3$ το

$$f(3) = \frac{1}{3}3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 2008 = 9 - 18 + 9 + 2008 = 2008$$

γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x, όπου $x \in [1, +\infty)$

η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_2 = 3$ το $f(3)$.

Άρα $f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow f(x) \geq 2008$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

α) Έχουμε: $\alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{2} = 2$

β) Τότε οι τιμές των πέντε βιβλίων σε ευρώ είναι: 8, 14, 20, 12, 16 και

$$\bar{x} = \frac{8+14+20+12+16}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

γ) Το εύρος των παρατηρήσεων είναι: $\mathcal{R} = 20 - 8 = 12$.

Γράφουμε σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις:

8, 12, 14, 16, 20.

Η διάμεσος είναι η 3^η παρατήρηση (μεσαία), δηλαδή $\delta = 14$.

Δ2.

α) $f_4 = 0,3$ άρα $f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{v_4}{50} \Rightarrow v_4 = 50 \cdot 0,3 = 15$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Rightarrow 6 + v_2 + 8 + 15 + 12 = 50 \Rightarrow v_2 = 9$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{6}{50} = 0,12 \text{ ή } 12\% \quad , \quad f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{9}{50} = 0,18 \text{ ή } 18\% \quad ,$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{8}{50} = 0,16 \text{ ή } 16\% \quad , \quad f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{12}{50} = 0,24 \text{ ή } 24\%$$

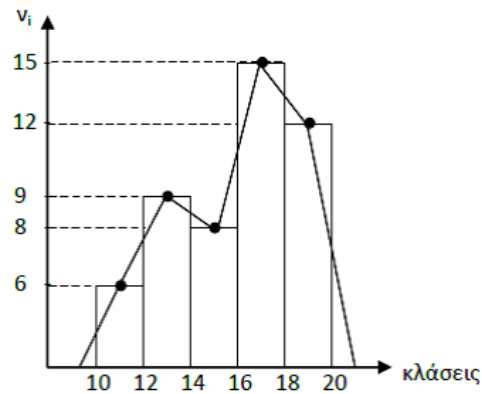
$$N_1 = v_1 = 6 \quad , \quad N_2 = v_1 + v_2 = 6 + 9 = 15 \quad , \quad N_3 = N_2 + v_3 = 15 + 8 = 23$$

$$N_4 = N_3 + v_4 = 23 + 15 = 38$$

$$c = \frac{20 - 10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Κλάσεις	κ_i	ν_i	N_i	f_i	$f_i\%$	$F_i\%$
[10,12)	11	6	6	0,12	12	12
[12,14)	13	9	15	0,18	18	30
[14,16)	15	8	23	0,16	16	46
[16,18)	17	15	38	0,3	30	76
[18,20)	19	12	50	0,24	24	100
Σύνολο		50		1	100	

β) i) ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων.



ii) το ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %.

