

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Εισηγητής: Παπαδάκης Γιώργος

Ημερομηνία: 08/02/26

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, σημειώνοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

1. Αν μια ευθεία ε είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ τότε είναι $\lambda_{\varepsilon}=0$.
2. Τα σημεία $A(1,\alpha+1)$, $B(2,\alpha+2)$, $\Gamma(3,\alpha+3)$ είναι συνευθειακά.
3. Αν η ευθεία $\varepsilon: \mu x+2y=1$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u}=(1,2)$ τότε $\mu=1$
4. Κάθε ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$, έχει εξίσωση της μορφής $y-y_0=\lambda(x-x_0)$.
5. Η ευθεία $y=2x+1$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$

(Μονάδες 10)

A2. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0 \quad (1)$$

και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

(Μονάδες 9)

A3. Να συμπληρώσετε τα κενά :

- 1) Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι θετικός, αν η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι..... και αρνητικός, αν είναι.....
- 2) Η εξίσωση κάθε ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο $M(x_0, y_0)$ είναι της μορφήςή.....
- 3) Η ευθεία με εξίσωση $y=\lambda x$ είναι διχοτόμος της γωνίας xOy , αν $\lambda=...$ ενώ είναι διχοτόμος της γωνίας $x'Oy$, αν $\lambda=...$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Β

B1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1: y=x+6$ και $\varepsilon_2: y=-2x+3$ και είναι:

α) παράλληλη προς την ευθεία $\zeta_1: y=-4x+1$.

β) παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

γ) παράλληλη προς τον άξονα $y'y$.

δ) κάθετη στην ευθεία $\zeta_2: y=x$

(Μονάδες 8)

B2. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος AB όπου $A(1,2)$ και $B(3,-4)$.

(Μονάδες 8)

B3. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(-1,2)$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων M για τα οποία ισχύει $(MAB)=1$ αποτελείται από δύο ευθείες και να γραψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : (\sin\theta)x + (\eta\mu\theta)y - 4 = 0$ και τα σημεία $A(\sin\theta, \eta\mu\theta)$ και $B(-\eta\mu\theta, \sin\theta)$. Να αποδείξετε ότι :

α) $d(A, \varepsilon) = 3$ και $d(B, \varepsilon) = 4$

(Μονάδες 6)

β) $(\angle OAB) = \frac{1}{2}$. Όπου O η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 6)

Γ2. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 1)$, $B(2, 4)$ και η ευθεία $\varepsilon : 3x - 4y - 15 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $d(A, \varepsilon) = d(B, \varepsilon)$.

(Μονάδες 6)

β) Αν Δ και Γ είναι οι προβολές των A και B αντίστοιχα στην ευθεία ε τότε να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = \frac{3}{4}x + 1$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι

παράλληλη στην ε και η οποία :

α) απέχει από αυτήν απόσταση 4 μονάδες .

(Μονάδες 6)

β) απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση 2 μονάδες .

(Μονάδες 6)

Δ2. Δίνεται το σημείο $A(1, 2)$ και η ευθεία $\varepsilon_1 : x + 2y - 1 = 0$. Να βρείτε :

α) τις εξισώσεις των ευθειών ε που είναι κάθετες στην ε_1 και ισχύει $d(A, \varepsilon) = \sqrt{5}$.

(Μονάδες 6)

β) την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών $\varepsilon_2 : 2x - y + 5 = 0$ και $\varepsilon_3 : 2x - y - 5 = 0$

(Μονάδες 7)

Ευχές για επιτυχία

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. 1) Σωστό, 2) Σωστό, 3) Σωστό, 4) Λάθος, 5) Λάθος

A2. Θεωρία σχολικό σελ.66

A3. 1) οξεία, αμβλεία

2) $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ ή $x = x_0$

3) 1, -1

ΘΕΜΑ Β

B1. Για να βρούμε το σημείο τομής Α των ευθειών $\varepsilon_1: y = x + 6$ και $\varepsilon_2: y = -2x + 3$ λύνουμε το σύστημα τους.

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 6 = -2x + 3 \\ y = x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = -3 \\ y = x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$$

Άρα Α(-1,5).

Έστω ε η ζητούμενη ευθεία.

α) $\lambda_{\varepsilon_1} = -4$ άρα και $\lambda_{\varepsilon} = -4$

οπότε $\varepsilon: y - 5 = -4(x + 1)$ ή $\varepsilon: y - 5 = -4x - 4$ ή $\varepsilon: y = -4x + 1$.

β) είναι οριζόντια άρα της μορφής $y = y_0$

οπότε $\varepsilon: y = 5$.

γ) είναι κατακόρυφη άρα της μορφής $x = x_0$

οπότε $\varepsilon: x = -1$.

δ) $\lambda_{\varepsilon_2} = 1$ άρα $\lambda_{\varepsilon} = -1$ γιατί $\varepsilon \perp \varepsilon_2$.

οπότε $\varepsilon: y - 5 = -1(x + 1)$ ή $\varepsilon: y - 5 = -x - 1$ ή $\varepsilon: y = -x + 4$.

B2. Βρίσκουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

Έχουμε $\lambda_{AB} = \frac{-4 - 2}{3 - 1} = \frac{-6}{2} = -3$.

Αν ε είναι η ζητούμενη ευθεία, τότε $\varepsilon \perp AB$.

Άρα $\lambda_{\varepsilon} \lambda_{AB} = -1$

Είναι $\lambda_{AB} = -3$ οπότε $\lambda_{\varepsilon} = \frac{1}{3}$.

Έστω Μ το μέσο του ΑΒ.

Ισχύουν:

$$x_M = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

$$\text{και } y_M = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Άρα το σημείο Μ έχει συντεταγμένες Μ(2,-1).

Οπότε η μεσοκάθετη έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y - (-1) = \frac{1}{3}(x - 2) \Leftrightarrow \varepsilon: y + 1 = \frac{1}{3}(x - 2) \Leftrightarrow \varepsilon: 3y + 3 = x - 2 \Leftrightarrow \varepsilon: 3y - x = -5.$$

B3. Έστω $M(x,y)$

Έχουμε $\overrightarrow{AM} = (x-1, y-1)$ και $\overrightarrow{AB} = (-1-1, 2-1) = (-2, 1)$

Ισχύει :

$$\begin{aligned} (MAB) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})| = 1 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x-1 & y-1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \Leftrightarrow |x-1+2(y-1)| = 2 \Leftrightarrow \\ |x-1+2y-2| &= 2 \Leftrightarrow |x+2y-3| = 2 \Leftrightarrow \\ (x+2y-3=2 \text{ ή } x+2y-3=-2) &\Leftrightarrow \\ (x+2y-5=0 \text{ ή } x+2y-1=0) & \end{aligned}$$

Που είναι οι ζητούμενες ευθείες.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Έχουμε:

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|(\sin\theta)\sin\theta + (\eta\mu\theta)\eta\mu\theta - 4|}{\sqrt{\sin^2\theta + \eta\mu^2\theta}} = \frac{|\sin^2\theta + \eta\mu^2\theta - 4|}{\sqrt{1}} = \frac{|1-4|}{1} = 3$$

$$d(B, \varepsilon) = \frac{|(\sin\theta)(-\eta\mu\theta) + (\eta\mu\theta)\sin\theta - 4|}{\sqrt{\sin^2\theta + \eta\mu^2\theta}} = \frac{|-4|}{\sqrt{1}} = 4$$

β) Επειδή $A(\sin\theta, \eta\mu\theta)$ και $B(-\eta\mu\theta, \sin\theta)$, έχουμε:

$\overrightarrow{OA} = (\sin\theta, \eta\mu\theta)$ και $\overrightarrow{OB} = (-\eta\mu\theta, \sin\theta)$

Επομένως :

$$(OAB) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sin\theta & \eta\mu\theta \\ -\eta\mu\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |\sin^2\theta + \eta\mu^2\theta| = \frac{1}{2}$$

Γ2. α) Έχουμε:

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|3(-2) - 4 \cdot 1 - 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-6 - 4 - 15|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-25|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$$

$$d(B, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 - 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 - 16 - 15|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-25|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$$

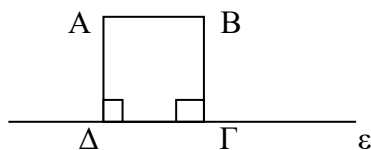
Άρα $d(A, \varepsilon) = d(B, \varepsilon)$.

β) Επειδή $d(A, \varepsilon) = d(B, \varepsilon) = 5$ ισχύει και $(A\Delta) = (B\Gamma) = 5$ και $A\Delta // B\Gamma$, οπότε το $AB\Gamma\Delta$

είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Για να είναι τετράγωνο αρκεί $(AB)=5$

Πράγματι $(AB) = \sqrt{(2+2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω ζ η ζητούμενη ευθεία, τότε $\lambda_{\zeta} = \lambda_{\varepsilon} = \frac{3}{4}$, οπότε :

$\zeta: y = \frac{3}{4}x + \beta$ δηλαδή $\zeta: 3x - 4y + 4\beta = 0$

α) Ένα τυχαίο σημείο της ευθείας ε είναι το $A(0,1)$. Άρα πρέπει $d(A,\zeta)=4$ ή ισοδύναμα:

$$\frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 1 + 4\beta|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4 \Leftrightarrow |-4 + 4\beta| = 4 \cdot 5 \Leftrightarrow |\beta - 1| = 5 \Leftrightarrow$$

$$(\beta - 1 = 5 \text{ ή } \beta - 1 = -5) \Leftrightarrow (\beta = 6 \text{ ή } \beta = -4).$$

Επομένως είναι: $\zeta_1: y = \frac{3}{4}x + 6$ και $\zeta_2: y = \frac{3}{4}x - 4$.

β) Πρέπει $d(O,\zeta)=2$ ή ισοδύναμα:

$$\frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 4\beta|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2 \Leftrightarrow |4\beta| = 2 \cdot 5 \Leftrightarrow |4\beta| = 10 \Leftrightarrow$$

$$(4\beta = 10 \text{ ή } 4\beta = -10) \Leftrightarrow \left(\beta = \frac{5}{2} \text{ ή } \beta = -\frac{5}{2} \right).$$

Επομένως είναι: $\zeta_1: y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ και $\zeta_2: y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$.

Δ2. α) Είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{1}{2}$ και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon$, άρα $\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = 2$.

Οπότε $\varepsilon: y = 2x + \beta$ ή $\varepsilon: 2x - y + \beta = 0$.

Επομένως είναι: $d(A,\varepsilon) = \sqrt{5}$ ή ισοδύναμα:

$$\frac{|2 \cdot 1 - 2 + \beta|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |\beta| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \Leftrightarrow |\beta| = 5 \Leftrightarrow$$

$$(\beta = 5 \text{ ή } \beta = -5).$$

Άρα οι ευθείες είναι: $y = 2x + 5$ ή $y = 2x - 5$.

β) Αν $M(x,y)$ είναι σημείο της μεσοπαράλληλης των ευθειών $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ τότε ισχύει:

$$d(M, \varepsilon_2) = d(M, \varepsilon_3) \Leftrightarrow \frac{|2x - y + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2x - y - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Leftrightarrow |2x - y + 5| = |2x - y - 5| \Leftrightarrow$$

$$(2x - y + 5 = 2x - y - 5 \text{ ή } 2x - y + 5 = -2x + y + 5) \Leftrightarrow$$

$$(\text{αδύνατη} \text{ ή } 2x - y = 0).$$