

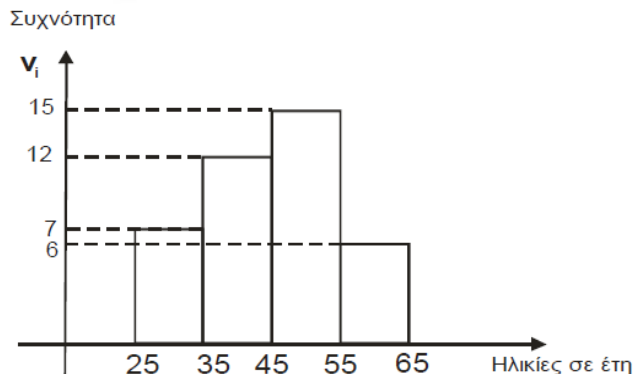
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΠΑΛ
Εισηγητής: ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
Τμήμα: Γ ΕΠΑΛ
Ημερομηνία: 25/01/2026

ΘΕΜΑ Α

- A1. α)** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
(μονάδες 3)
- β)** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
(μονάδες 2)
- γ)** Τι ονομάζεται συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής;
(μονάδες 2)
- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.
- α)** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μιας ποσοτικής μεταβλητής.
- β)** $(\sin x)' = \eta \mu x$
- γ)** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- δ)** Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων παρατηρήσεων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και του οριζόντιου άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.
- ε)** $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$
(μονάδες 10)
- A3.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$
Τότε να αποδείξετε ότι $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
(μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα, που αφορά τις ηλικίες 40 εργαζομένων σε μια επιχείρηση.



- α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα.

Ηλικίες [,)	Μέσο διαστήματος x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
[25,35)				
[35,45)				
[45,55)				
[55,65)				
Σύνολα				

(μονάδες 10)

- β) Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία το πολύ 47 ετών;

(μονάδες 5)

- γ) Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών;

(μονάδες 5)

- δ) Τι ποσοστό εργαζομένων έχουν ηλικία κάτω των 35 ετών;

(μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x + 4}{x + 1}, & x \neq -1 \\ a^3 - 2, & x = -1 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

Αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$ τότε

- α) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό a .

(μονάδες 7)

- β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.

(μονάδες 4)

- γ) Για $x \neq -1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon) : y + x = 0$.

(μονάδες 8)

- δ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f είναι αρνητικός.

(μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \kappa x^2 + x + \gamma$, με $\kappa, \gamma \in \mathbb{R}$

Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 1 και ισχύει ότι $f'(1) = -11$ τότε:

- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = -6x^2 + x + 1$, με $x \in \mathbb{R}$

(μονάδες 7)

- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που είναι κάθετη στην ευθεία $(\epsilon) : y = -x + 6$.

(μονάδες 5)

- γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{2x - 1}$

(μονάδες 6)

- δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι:
 $f(2017) \leq f(x) \leq f(2016)$ για κάθε $x \in [2016, 2017]$

(μονάδες 7)

Ευχές για επιτυχία

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** α) Θεωρία σχολικό σελ.14.
 β) Θεωρία σχολικό σελ.13.
 γ) Θεωρία σχολικό σελ.65.

A2. α) Λ, β)Λ, γ)Λ, δ)Σ, ε)Λ.

A3. Θεωρία σχολικό σελ.30.

ΘΕΜΑ Β

α) $v_1 = 7, v_2 = 12, v_3 = 15, v_4 = 6$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{7}{40} = 0,175 \text{ ή } 17,5\% , \quad f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{12}{40} = 0,3 \text{ ή } 30\% ,$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{15}{40} = 0,375 \text{ ή } 37,5\% , \quad f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{6}{40} = 0,15 \text{ ή } 15\%$$

Ηλικίες [,)	Μέσο διαστήματος x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
[25,35)	30	7	7	17,5
[35,45)	40	12	19	30
[45,55)	50	15	34	37,5
[55,65)	60	6	40	15
Σύνολα		40		100

β) Οι εργαζόμενοι με ηλικία το πολύ 47 είναι: $v_1 + v_2 + \frac{1}{5}v_3 = 7 + 12 + \frac{1}{5}15 = 19 + 3 = 22$

γ) Οι εργαζόμενοι με ηλικία τουλάχιστον 45 είναι: $v_3 + v_4 = 15 + 6 = 21$.

δ) Το ποσοστό των εργαζομένων με ηλικία κάτω των 35 ετών είναι: $f_1\% = 17,5\%$

ΘΕΜΑ Γ

α) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -1$ πρέπει :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1).$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 4)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 4) = 1 + 1 + 4 = 6$$

Για το $x^3 + 3x + 4$ εφαρμόζουμε σχήμα Horner με $\rho = -1$ και έχουμε:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 3 & 4 & \\ & -1 & 1 & -4 & \\ \hline 1 & -1 & 4 & 0 & \end{array} \quad \rho = -1$$

$$\text{Και } f(-1) = \alpha^3 - 2$$

$$\text{Οπότε } \alpha^3 - 2 = 6 \Leftrightarrow \alpha^3 = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

β) Για $x \neq -1$ έχουμε $f(x) = \frac{x^3 + 3x + 4}{x+1}$

άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών για κάθε $x \neq -1$
 οπότε θα είναι συνεχής και στο 2.

γ) Για $x \neq -1$, έχουμε $f(x) = \frac{x^3 + 3x + 4}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 4)}{x+1} = x^2 - x + 4$

Άρα

$$f'(x) = (x^2 - x + 4)' = 2x - 1$$

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής

Επειδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon) : y + x = 0$

Θα ισχύει $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\varepsilon\phi} = -1$ αλλά $\lambda_{\varepsilon\phi} = f'(x_0)$

Συνεπώς $f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 2x_0 - 1 = -1 \Leftrightarrow x_0 = 0$ και $f(0) = 4$

Άρα η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 4 = -1x \Leftrightarrow y = -x + 4$$

δ) Για $x \neq -1$ έχουμε $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

άρα $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{1}{2})$

ΘΕΜΑ Δ

α) Έχουμε $f'(x) = (\kappa x^2 + x + \gamma)' = 2\kappa x + 1$

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 1 άρα

$$B(0, 1) \in C_f \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1$$

Ακόμα $f'(1) = -11 \Leftrightarrow 2\kappa + 1 = -11 \Leftrightarrow 2\kappa = -12 \Leftrightarrow \kappa = -6$

Συνεπώς $f(x) = -6x^2 + x + 1$.

β) Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής

Επειδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon) : y = -x + 6$

Θα ισχύει $\lambda_\varepsilon \lambda_{\varepsilon\phi} = -1 \Leftrightarrow -1 \lambda_{\varepsilon\phi} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon\phi} = 1$ αλλά $\lambda_{\varepsilon\phi} = f'(x_0)$

Συνεπώς $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -12x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$ και $f(0) = 1$

Άρα η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = 1x \Leftrightarrow y = x + 1$$

γ) Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{2x-1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-6x^2 + x + 1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-6x^2 + x + 1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x - \frac{1}{2})(-6x - 2)}{2(x - \frac{1}{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-6x - 2}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (-3x - 1) = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Για το $-6x^2 + x + 1$ εφαρμόζουμε σχήμα Horner με $\rho = \frac{1}{2}$ και έχουμε:

$$\begin{array}{rrrr}
 -6 & 1 & 1 & \rho = \frac{1}{2} \\
 & -3 & -1 & \\
 -6 & -2 & 0 &
 \end{array}$$

δ) Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -12x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}$

$$\text{και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow -12x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{12}$$

οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$\frac{1}{12}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$			

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, \frac{1}{12}]$

και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{1}{12}, +\infty)$

οπότε είναι

$$2016 \leq x \leq 2017 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(2016) \geq f(x) \geq f(2017) \Leftrightarrow f(2017) \leq f(x) \leq f(2016)$$

για κάθε $x \in [2016, 2017]$