

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΠΑ.Λ.**

Εισηγητής: Παπαδάκης Γιώργος

Τμήμα: Γ' ΕΠΑ.Λ.

Ημερομηνία: 14/12/2025

ΘΕΜΑ Α

- A1.** α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (μονάδες 3)
 β) Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. (μονάδες 3)
 γ) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; (μονάδες 2)
- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.
 α) Αν $f(x)=\eta\mu x$ τότε $f''(x)=-f(x)$.
 β) Η συνάρτηση $f(x)=x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$.
 γ) Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
 δ) Για $x>0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
 ε) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 . (μονάδες 10)
- A3.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x$ είναι ίση με 1. (μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5+5x^2}-5}{x-2} & x \neq 2 \\ -\alpha^2+3\alpha & x=2 \end{cases}$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

(μονάδες 12)

B2. Να υπολογίσετε το όριο.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2+3}+2x-3}{6x^2-x-1}$$

(μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$, όπου α πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει:

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 9$

(μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$

(μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$.

(μονάδες 6)

Γ2.

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού τέτοιο ώστε:

$$P(0) = -1, \quad P'(1) = 5, \quad P'(0) = 2 \quad \text{και} \quad P''(1) = 2$$

(μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, τότε:

α) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .

(μονάδες 10)

β) Για $\alpha = 6$ και $\beta = 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(μονάδες 8)

γ) Για $\alpha = 6$ και $\beta = 1$, να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

(μονάδες 7)

Ευχές για επιτυχία

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΠΑΛ
Εισηγητής: ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
Τμήμα: Γ ΕΠΑΛ
Ημερομηνία: 14/12/2025

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** α) Θεωρία σχολικό σελ.16.
β) Θεωρία σχολικό σελ.22.
γ) Θεωρία σχολικό σελ.13.

A2. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ.

A3. Θεωρία σχολικό σελ.28.

ΘΕΜΑ Β

B1

Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ πρέπει :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2).$$

Ισχύει:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5+5x^2} - 5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{5+5x^2} - 5)(\sqrt{5+5x^2} + 5)}{(x-2)(\sqrt{5+5x^2} + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{5+5x^2})^2 - 5^2}{(x-2)(\sqrt{5+5x^2} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5+5x^2 - 25}{(x-2)(\sqrt{5+5x^2} + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 20}{(x-2)(\sqrt{5+5x^2} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x^2 - 4)}{(x-2)(\sqrt{5+5x^2} + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{5+5x^2} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x+2)}{\sqrt{5+5x^2} + 5} = \\ &= \frac{5(2+2)}{\sqrt{5+5 \cdot 2^2} + 5} = \frac{20}{10} = 2. \end{aligned}$$

Επίσης $f(2) = -\alpha^2 + 3\alpha$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } -\alpha^2 + 3\alpha &= 2 \Rightarrow -\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0 \\ \Delta &= 9 - 8 = 1 \text{ και } \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x - 3}{6x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2 + 3} + (2x - 3)}{6x^2 - x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[\sqrt{4x^2 + 3} + (2x - 3)][\sqrt{4x^2 + 3} - (2x - 3)]}{(6x^2 - x - 1)[\sqrt{4x^2 + 3} - (2x - 3)]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[\sqrt{4x^2 + 3}]^2 - (2x - 3)^2}{(6x^2 - x - 1)[\sqrt{4x^2 + 3} - (2x - 3)]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 + 3 - 4x^2 + 12x - 9}{(6x^2 - x - 1)[\sqrt{4x^2 + 3} - (2x - 3)]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x - 6}{(6x^2 - x - 1)[\sqrt{4x^2 + 3} - (2x - 3)]} \quad (1)$$

Το $6x^2 - x - 1$ έχει $\alpha=6$, $\Delta=25$ και ρίζες τις $\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{3}$

$$\text{Άρα } 6x^2 - x - 1 = 6(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{3}) = 2(x - \frac{1}{2})3(x + \frac{1}{3}) = (2x - 1)(3x + 1)$$

Οπότε η (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6(2x - 1)}{(2x - 1)(3x + 1)[\sqrt{4x^2 + 3} - (2x - 3)]} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6}{(3x + 1)[\sqrt{4x^2 + 3} - 2x + 3]} = \\ \frac{6}{(3\frac{1}{2} + 1)[\sqrt{4(\frac{1}{2})^2 + 3} - 2\frac{1}{2} + 3]} &= \frac{6}{(\frac{3}{2} + 1)[\sqrt{4\frac{1}{4} + 3} - 1 + 3]} = \frac{6}{\frac{5}{2}[\sqrt{1 + 3} - 1 + 3]} = \\ \frac{6}{4\frac{5}{2}} &= \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

α)

$$\text{Έχουμε } f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$\text{Οπότε } 2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$$

$$2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 12x - 24 + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 &= 3x^2 \Leftrightarrow \\ -24 + \alpha + 15 &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha &= 9 \end{aligned}$$

β) Για $x \neq \pm 1$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-3)}{(x+1)} = \frac{-6}{2} = -3 \end{aligned}$$

γ) Τα σημεία $(x_0, f(x_0))$ της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στην ευθεία $y = -3x$, είναι εκείνα για τα οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} f'(x_0) = -3 &\Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3(x_0^2 - 4x_0 + 4) = 0 \\ 3(x_0 - 2)^2 &= 0 \Leftrightarrow x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \end{aligned}$$

Και είναι $f(2) = -5$.

Επομένως το σημείο επαφής είναι το $A(2, -5)$.

Η εφαπτόμενη είναι της μορφής:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{Άρα } \varepsilon: y - (-5) = -3(x - 2)$$

$$\varepsilon: y = -3x + 1$$

Γ2

Έστω το $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, με $\alpha \neq 0$ το ζητούμενο πολυώνυμο.

$$P(0) = \delta = -1. \text{ Άρα } P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 1.$$

$$P'(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 1)' = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \text{ οπότε}$$

$$P'(1) = 5 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \quad (1) \quad \text{και} \quad P'(0) = 2 \Leftrightarrow \gamma = 2$$

Επομένως

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x - 1.$$

$$\text{και η } (1) \Rightarrow 3\alpha + 2\beta + 2 = 5 \Rightarrow 3\alpha + 2\beta = 3 \quad (2)$$

$$P''(x) = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)' = 6\alpha x + 2\beta \text{ οπότε } P''(1) = 2 \Leftrightarrow 6\alpha + 2\beta = 2 \quad (3)$$

Λύνουμε το σύστημα των (2) και (3).

$$\left. \begin{array}{l} 3\alpha + 2\beta = 3 \\ 6\alpha + 2\beta = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3\alpha + 2\beta = 3 \\ -6\alpha - 2\beta = -2 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} -3\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Η } (3) \Rightarrow -\frac{6}{3} + 2\beta = 2 \Rightarrow -2 + 2\beta = 2 \Rightarrow 2\beta = 4 \Rightarrow \beta = 2$$

Οπότε:

$$P(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x - 1.$$

ΘΕΜΑ Δ

α) Ισχύει: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \alpha x + \beta$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

στο οποίο είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
και παραγωγίζεται ως πολυώνυμο με

$$f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 - \frac{5}{2}2x + \alpha = x^2 - 5x + \alpha$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$, άρα

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow 4 - 5 \cdot 2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow 4 - 10 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \underline{\alpha = 6}.$$

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$, άρα $f(0) = 1 \Leftrightarrow \underline{\beta = 1}$.

β) Για $\alpha = 6$ και $\beta = 1$, έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1 \quad \text{και} \quad f'(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Το $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1$, $\Delta = 25 - 24 = 1$ και ρίζες τις 2 και 3.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		τ.μ	τ.ελ.	

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2]$ και $[3, +\infty)$
και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 3]$.

γ) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 2$ το

$$f(2) = \frac{8}{3} - 10 + 12 + 1 = \frac{8}{3} + 3 = \frac{17}{3}$$

και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 3$ το

$$f(3) = \frac{1}{3}3^3 - \frac{5}{2}3^2 + 6 \cdot 3 + 1 = 9 - \frac{45}{2} + 18 + 1 = 28 - \frac{45}{2} = \frac{11}{2}$$