

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Εισηγητής : Τσολάκος Γιώργος

Ημερομηνία: 14.12.25

ΘΕΜΑ Α

A1. Για οποιαδήποτε γωνία ω να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

(μονάδες 5)

- A2. α.** Πότε μια συνάρτηση καλείται περιοδική σε ένα διάστημα Δ ;
β. Πώς ορίζεται η γωνία 1 μοίρας;
γ. Πότε μια συνάρτηση καλείται άρτια;

(μονάδες 6)

A3. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τους τύπους λύσεων των ακόλουθων τριγωνομετρικών εξισώσεων:

- $\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) =$
- $\epsilon\phi(\pi + \omega) =$
- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) =$
- $\sigma\phi(-\omega) =$

(μονάδες 4)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι άρτια
β) Ισχύει $\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
γ) Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ έχει πεδίο ορισμού της το $\mathbb{R}_1 = \{x \in \mathbb{R} / \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$
δ) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \epsilon\phi(x)$ είναι το $[-1, 1]$.
ε) Η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον γ'γ.

(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

B1. Να σχεδιάσετε σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu\frac{x}{3}$, $g(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$, $h(x) = 1 - 3\sigma\upsilon\nu 2x$.

(μονάδες 15)

B2. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες με την προϋπόθεση ότι ορίζονται:

- α.** $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \epsilon\phi\alpha} + \frac{\eta\mu\alpha}{1 - \sigma\phi\alpha} = \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha$
β. $\frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} + 2\sigma\phi\alpha = 0$

(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν $3\sin^2 x - \eta\mu^2 x = 0$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

(μονάδες 10)

Γ2. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες με την προϋπόθεση ότι ορίζονται:

α. $(\eta\mu x - \epsilon\phi x)^2 + (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 = \left(1 - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2$

β. $\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \epsilon\phi x\right)^2 = \frac{1 - \eta\mu x}{1 + \eta\mu x}$

γ. $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \epsilon\phi x} - \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$

(μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$, να υπολογιστεί η παράσταση:

$$\Pi = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

(μονάδες 13)

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \epsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu^2(41\pi + x)} + \frac{\eta\mu^2(x - \pi) + \sigma\upsilon\nu^2(21\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{81\pi}{2} - x\right)} = \frac{2}{\eta\mu x}$$

(μονάδες 12)

Ευχές για επιτυχία!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

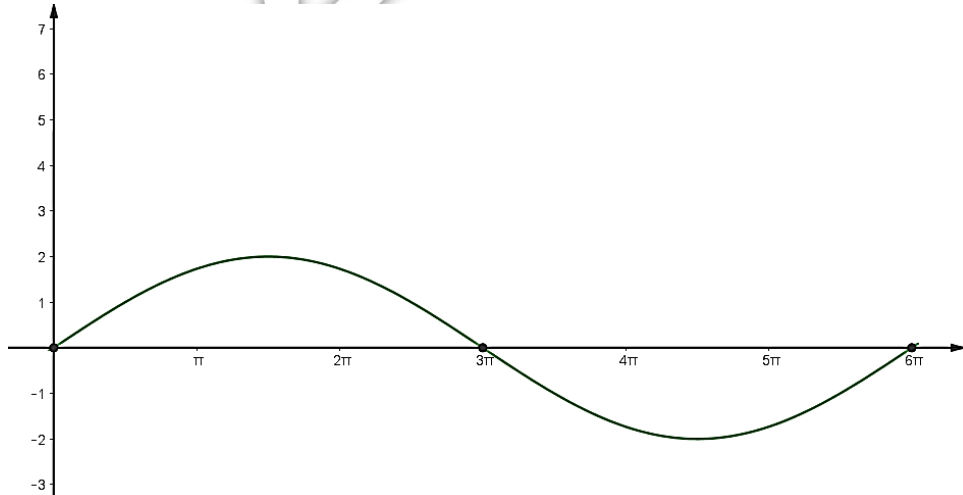
- A1.** Απόδειξη σελ. 61 σχ. βιβλίου
- A2.** α) Ορισμός σελ. 74 σχ. βιβλίου
 β) Ως γωνία 1 μοίρας ορίζουμε την επίκεντρη γωνία που το αντίστοιχο της τόξο ισούται με $\frac{1}{360} \cdot L$ όπου L το μήκος του κύκλου.
 γ) Ορισμός σελ. 35 σχ. βιβλίου
- A3.** $\sin(\pi - \omega) = -\sin \omega$
 $\epsilon\phi(\pi + \omega) = \epsilon\phi \omega$
 $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sin \omega$
 $\sigma\phi(-\omega) = -\sigma\phi \omega$
- A4.** α) Λάθος (είναι ΠΕΡΙΤΤΗ αφού $f(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -f(x)$)
 β) Λάθος (το σωστό είναι $\sin(\pi - \omega) = -\sin \omega$)
 γ) Σωστό
 δ) Λάθος (το σωστό είναι όλο το $\mathbb{R}$)
 ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{3}$ είναι της μορφής $f(x) = p \cdot \eta\mu \omega x$ με $p = 2$, $\omega = \frac{1}{3}$ οπότε η C_f είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη με ΜΕΓΙΣΤΗ τιμή το $p = 2$, ΕΛΑΧΙΣΤΗ τιμή το $-p = -2$ αι περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

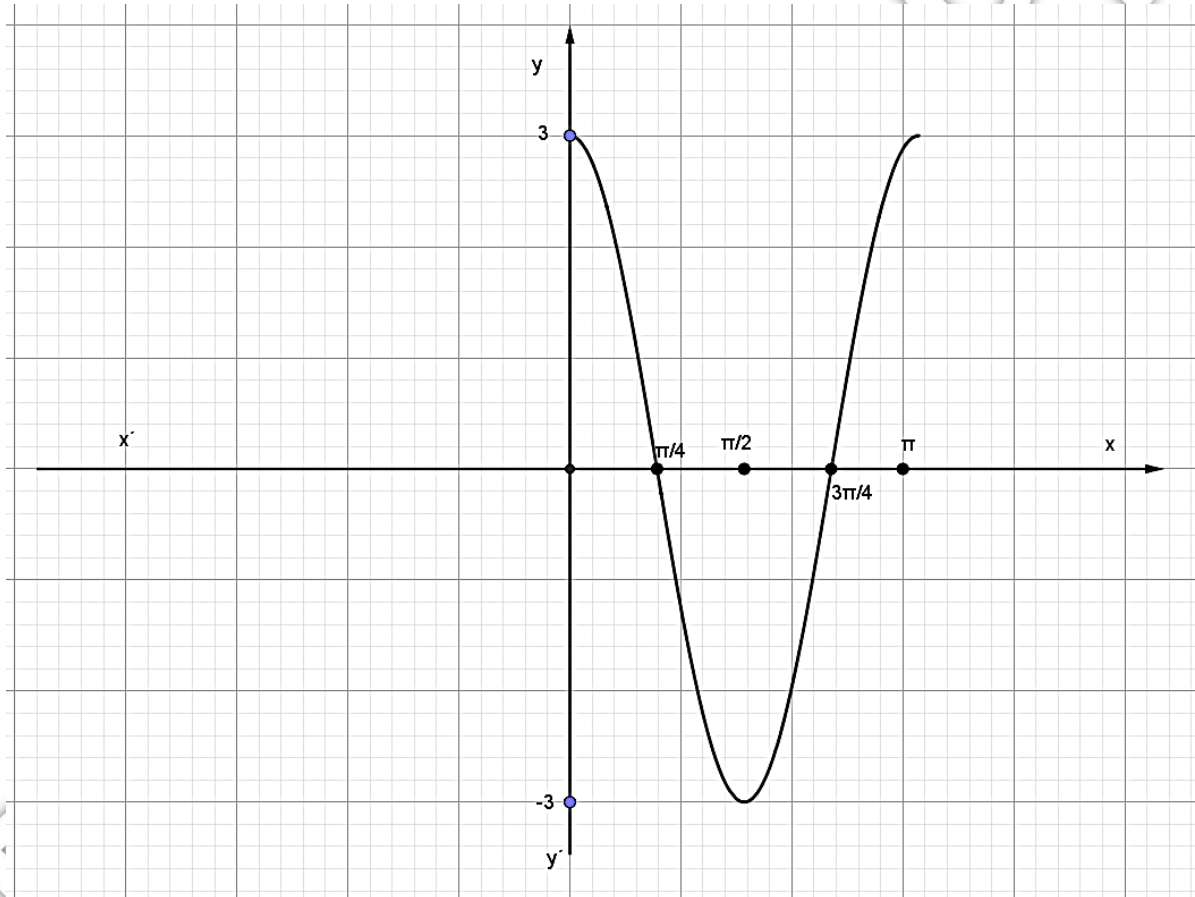
Άρα σχεδιάζουμε τη C_f στο $[0, T] = [0, 6\pi]$ το οποίο χωρίζουμε σε 4 ίσα υποδιαστήματα με άκρα τα $0, \frac{T}{4} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}, \frac{T}{2} = \frac{6\pi}{2} = 3\pi, \frac{3T}{4} = \frac{3 \cdot 6\pi}{4} = \frac{9\pi}{2}$ και

$T = 6\pi$



Η $g(x) = 3\sin 2x$ είναι της μορφής $g(x) = p \cdot \sin x$ με $p = 3$, $\omega = 2$ οπότε η C_g είναι μία συνημιτονοειδής καμπύλη με ΜΕΓΙΣΤΗ τιμή το $p = 3$, ΕΛΑΧΙΣΤΗ τιμή το $-p = -3$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

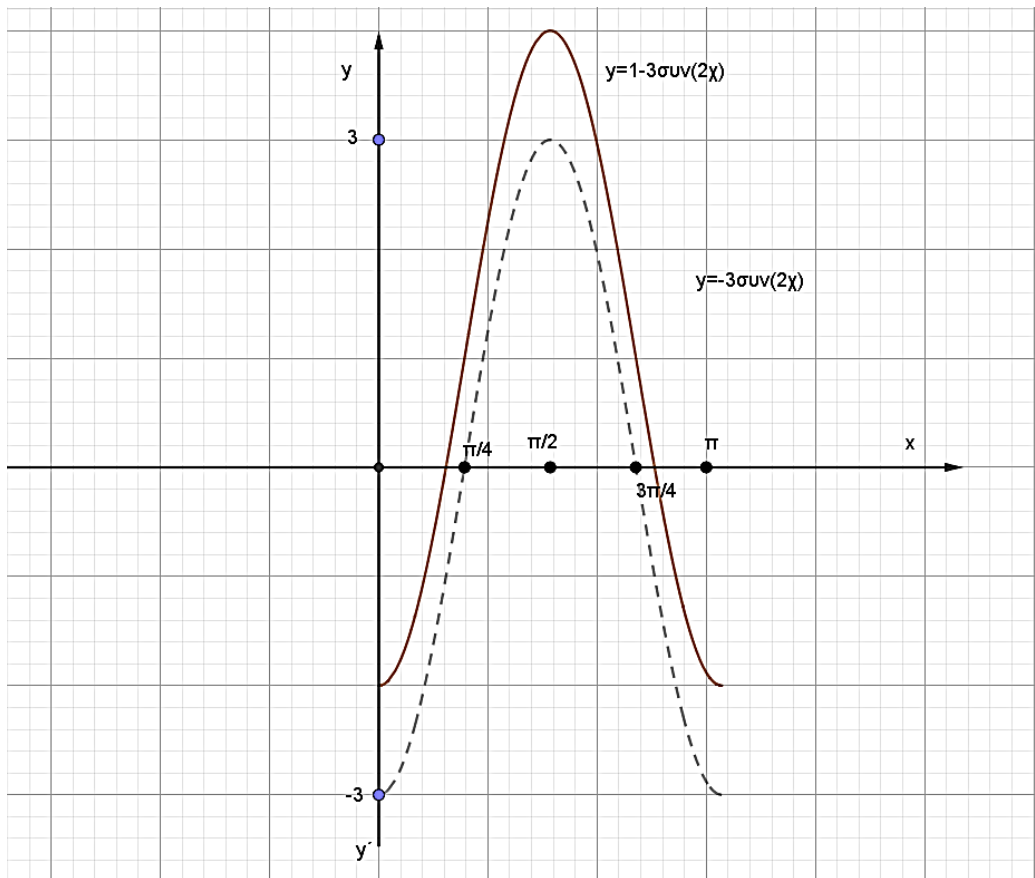
Άρα σχεδιάζουμε τη C_g στο $[0, T] = [0, \pi]$ το οποίο χωρίζουμε σε 4 υποδιαστήματα με άκρα τα $0, \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{4}$ και $T = \pi$



Η $g(x) = 3\sin 2x$ είναι της μορφής $g(x) = p \cdot \sin x$ με $p = 3$, $\omega = 2$ οπότε η C_g είναι μία συνημιτονοειδής καμπύλη με ΜΕΓΙΣΤΗ τιμή το $p = 3$, ΕΛΑΧΙΣΤΗ τιμή το $-p = -3$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Άρα σχεδιάζουμε τη C_g στο $[0, T] = [0, \pi]$ το οποίο χωρίζουμε σε 4 υποδιαστήματα με άκρα τα $0, \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{4}$ και $T = \pi$

Η $h(x) = 1 - 3\sin 2x = 1 - g(x)$ οπότε η C_h θα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της C_g μετατοπισμένη κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.



B2. α.
$$\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\epsilon\phi\alpha} + \frac{\eta\mu\alpha}{1-\sigma\phi\alpha}}{1-\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}} + \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}} + \frac{\eta\mu\alpha}{1-\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}}}{1-\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha} + \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha} + \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha} + \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha} + \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha} + \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha} + \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}} =$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha} = \sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha$$

β.
$$\frac{\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} + 2\sigma\phi\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} - \frac{(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} + \frac{2(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} =$$

$$= \frac{\eta\mu^2\alpha - (1+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + 2(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} =$$

$$= \frac{\eta\mu^2\alpha - 1 - 2\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} = \frac{\eta\mu^2\alpha - 1 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} =$$

$$= \frac{-\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} = \frac{0}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} = 0$$

B3. α. Ισχύει $A+B+\Gamma=\pi \Rightarrow B+\Gamma=\pi-A$
Άρα $\epsilon\phi(B+\Gamma)=\epsilon\phi(\pi-\Gamma) \Rightarrow \epsilon\phi(B+\Gamma)=-\epsilon\phi\Gamma \Rightarrow \epsilon\phi\Gamma+\epsilon\phi(B+\Gamma)=0$

β. Ισχύει $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\Gamma}{2} \Rightarrow \eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Gamma}{2}\right) \Rightarrow$
 $\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \Rightarrow \eta\mu^2\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2} \Rightarrow \eta\mu^2\frac{A+B}{2}=1-\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} \Rightarrow$
 $\eta\mu^2\left(\frac{A+B}{2}\right)+\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}=1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει: $3\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x=0 \Rightarrow 3\sigma\upsilon\nu^2x-(1-\sigma\upsilon\nu^2x)=0 \Rightarrow 3\sigma\upsilon\nu^2x-1+\sigma\upsilon\nu^2x=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2x-1=0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2x=\frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2x}=\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow |\sigma\upsilon\nu x|=\frac{1}{2} \begin{matrix} \frac{\pi}{2}<x<\pi \\ \sigma\upsilon\nu x<0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}}$$

Τότε $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1 \Rightarrow \eta\mu^2x=1-\sigma\upsilon\nu^2x \Rightarrow \eta\mu^2x=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \eta\mu^2x=1-\frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\eta\mu^2x=\frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{\eta\mu^2x}=\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow |\eta\mu x|=\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{matrix} \frac{\pi}{2}<x<\pi \\ \eta\mu x>0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\eta\mu x=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Άρα $\epsilon\phi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow \epsilon\phi x=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{\epsilon\phi x=-\sqrt{3}}$

και $\sigma\phi x=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \Rightarrow \sigma\phi x=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \sigma\phi x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sigma\phi x=-\frac{1\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} \Rightarrow \boxed{\sigma\phi x=-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

Γ2. α. Έστω ότι ισχύει η ισότητα:

$$(\eta\mu x-\epsilon\phi x)^2+(\sigma\upsilon\nu x-1)^2-\left(1-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\eta\mu x-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2+(\sigma\upsilon\nu x-1)^2=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2+(\sigma\upsilon\nu x-1)^2=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x-1)}{\sigma\upsilon\nu x}\right]^2+(\sigma\upsilon\nu x-1)^2=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu^2 x (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\sigma\upsilon\nu x} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \left(\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 1 \right) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\sigma\upsilon\nu x} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \left(\frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\sigma\upsilon\nu x} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\sigma\upsilon\nu x} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\sigma\upsilon\nu x} \right)^2 = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\sigma\upsilon\nu x} \right)^2 \text{ που ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική σχέση.}$$

β.
$$\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \epsilon\phi x \right)^2 = \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)^2 = \left(\frac{1 - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)^2 = \frac{(1 - \eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{(1 - \eta\mu x)^2}{1 - \eta\mu^2 x} = \frac{(1 - \eta\mu x)^2}{(1 - \eta\mu x)(1 + \eta\mu x)} = \frac{1 - \eta\mu x}{1 + \eta\mu x}$$

γ.
$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \epsilon\phi x} - \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} - \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} =$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} - \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} =$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = \frac{(\cancel{\sigma\upsilon\nu x} - \eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)}{\cancel{\sigma\upsilon\nu x} - \eta\mu x} = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$$

Γ3. α. $\alpha = \eta\mu(-1110^\circ) = -\eta\mu 1110^\circ = -\eta\mu(3 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}$

$$\beta = \epsilon\phi \frac{17\pi}{4} = \epsilon\phi \left(\frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \epsilon\phi \left(4\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \epsilon\phi \left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1$$

Άρα $\alpha = -\frac{1}{2}$ και $\beta = 1$

β. Έστω ότι ισχύει η ισότητα:

$$\eta\mu^2 \omega - \epsilon\phi^2 \omega = 2\alpha\beta \cdot \epsilon\phi^2 \omega \cdot \eta\mu^2 \omega \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 \omega - \epsilon\phi^2 \omega = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \epsilon\phi^2 \omega \cdot \eta\mu^2 \omega \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega - \epsilon\phi^2 \omega = -\epsilon\phi^2 \omega \cdot \eta\mu^2 \omega \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 \omega - \epsilon\phi^2 \omega + \epsilon\phi^2 \omega \cdot \eta\mu^2 \omega = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega - \epsilon\phi^2 \omega (1 - \eta\mu^2 \omega) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 \omega - \epsilon\phi^2 \omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega - \frac{\eta\mu^2 \omega}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2 \omega}} \cdot \cancel{\sigma\upsilon\nu^2 \omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 \omega - \eta\mu^2 \omega = 0 \text{ που ισχύει άρα ισχύει και η αρχική ισότητα.}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma. \quad A &= \frac{1}{\eta\mu^2 5} - \frac{1}{\epsilon\phi^2 5} = \frac{\epsilon\phi^2 5 - \eta\mu^2 5}{\eta\mu^2 5 \cdot \epsilon\phi^2 5} = \frac{-(\eta\mu^2 5 - \epsilon\phi^2 5)}{\eta\mu^2 5 \cdot \epsilon\phi^2 5} = \\
 &= \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)1 \cdot \cancel{\eta\mu^2 5} \cdot \cancel{\epsilon\phi^2 5}}{\cancel{\eta\mu^2 5} \cdot \cancel{\epsilon\phi^2 5}} = -1
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παρατηρούμε ότι $\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ δηλαδή τα τόξα

$\frac{\pi}{4} - \alpha$ και $\frac{\pi}{4} + \alpha$ είναι συμπληρωματικά, συνεπώς ισχύει:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right] = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \quad (1)$$

Τότε από υπόθεση ισχύει:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \left[\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$1 + 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{9} - 1 \Rightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\frac{8}{9} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\frac{4}{9} \Rightarrow \boxed{\Pi = -\frac{4}{9}} \{$$

Δ2. Απλοποιούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των τόξων που εμφανίζονται στην παράσταση Α:

- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$
- $\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sigma\phi\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\phi\left[\frac{\pi}{2} - (-x)\right] = \epsilon\phi(-x) = -\epsilon\phi x$
- $\epsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \epsilon\phi\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = -\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sigma\phi x$
- $\sigma\upsilon\nu(41\pi + x) = \sigma\upsilon\nu(40\pi + \pi + x) = \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$
- $\eta\mu(x - \pi) = \eta\mu[-(\pi - x)] = -\eta\mu(\pi - x) = -\eta\mu(x)$

- $\sin(21\pi + x) = \sin(20\pi + \pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{81\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{80\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(40\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Τότε:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sin x}{-\cos x \cdot (-\sin x) - (-\sin x)^2} + \frac{(-\sin x)^2 + (-\cos x)^2}{\sin x} = \\
 &= \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x - \sin^2 x} + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} = \\
 &= \frac{\cancel{\sin x}}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}
 \end{aligned}$$