

**8ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΔΙΑΤΑΞΗ – ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ – ΡΙΖΕΣ

Εισηγητής: Τσολάκος Γιώργος

Ημερομηνία: 14/12/2025

ΘΕΜΑ Α

A₁. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta|$.

(06 μονάδες)

A₂. Να συμπληρώσετε τις ισότητες

i. $(\alpha + \beta)^3 =$

ii. $\alpha^3 - \beta^3 =$

iii. $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} =$

iv. $\alpha^\nu \cdot \beta^\nu =$

v. $d(\alpha, \beta) =$

vi. $\sqrt{\alpha^2} =$

(06 μονάδες)

A₃. Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α ;

(03 μονάδες)

A₄. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$

β. Αν $x^2 + y^2 = 0$ τότε $x = 0$ ή $y = 0$

γ. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε ισχύει πάντα $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$

δ. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $|- \alpha| = |\alpha|$

ε. Για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει $\sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha + \beta}$

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

B₁. Να απλοποιήσετε την παράσταση $K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2}$ για $\alpha \neq \pm \beta$

(08 μονάδες)

B₂. Αν $x = \sqrt{7} + 2\sqrt{5}$ και $y = \sqrt{7} - 2\sqrt{5}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$A = x^2 - 3xy + y^2$

(07 μονάδες)

B₃. Έστω $0 < x < 2$ και θεωρούμε τις παραστάσεις:

$A = |x + 1| + |x + 2| + 2|x - 2|$

$B = |x - 2| + |2x - 5| + |3x|$

Να δείξετε ότι $A = B$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = (\sqrt{5} - 1)^2 - (\sqrt{5} + 1)^2 - 4(1 - \sqrt{5}) + 5, \quad \beta = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

και η παράσταση $A = |x - 1| - |x - 4| + 5$, όπου ο πραγματικός αριθμός x ανήκει στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 4$

(06 μονάδες)

Γ₂. Να αποδείξετε ότι $A = 2x$ και να λύσετε την εξίσωση $\frac{4}{A-1} + \frac{2}{A+1} = \frac{A^2+2}{A^2-1}$

(08 μονάδες)

Γ₃. Αν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $x + 2$, $y - 1$ όπου $\alpha \leq x \leq \beta$ και $\alpha + 1 \leq y \leq 2\beta$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος και το εμβαδόν του.

(06 μονάδες)

Γ₄. Αν $x \in [\alpha, \beta]$ να λύσετε την εξίσωση $(\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 1|x - 4| + 5)^2 = 9$

(05 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. Δίνονται οι αριθμοί $x = \sqrt{3} + 1$ και $y = \sqrt{3} - 1$

α. Να δείξετε ότι $x^2 + y^2 = 8$

(03 μονάδες)

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = x^2 + y^2 + \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$

(05 μονάδες)

γ. Με τη βοήθεια της σχέσης που αποδείξατε στο ερώτημα α, να δείξετε ότι:

$$\sqrt{x^4 - 4y^2 + 36} + \sqrt{y^4 - 10x^2 + 105} = 15$$

(04 μονάδες)

Δ₂. Θεωρούμε την παράσταση $A = \sqrt{1+\alpha} + \sqrt{1-\alpha}$ όπου $\alpha = \frac{2x}{x^2+1}$

α. Να δείξετε ότι: $A = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}(|x+1| + |x-1|)$

(05 μονάδες)

β. Αν $d(x, 0) < 1$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $A = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

(04 μονάδες)

ii. $A > \sqrt{2}$

(04 μονάδες)

Ευχές για Επιτυχία!!!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Απόδειξη σελ. 63 σχ. βιβλίου

A₂.

i. $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

ii. $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

iii. $\alpha^{\mu-\nu}$

iv. $(\alpha \cdot \beta)^\nu$

v. $|\alpha - \beta|$

vi. $|\alpha|$

A₃. Ορισμός σελ. 69 σχ. βιβλίου

A₄. α) Σωστό

β) Λάθος (το σωστό είναι: αν $x^2 + y^2 = 0$ τότε $x = 0$ και $y = 0$)

γ) Λάθος (ισχύει μόνο αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$)

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B₁.
$$K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{(\cancel{\alpha - \beta})(\alpha + \beta)}{\cancel{\alpha - \beta}} - \frac{(\cancel{\alpha - \beta})(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{(\cancel{\alpha - \beta})(\alpha + \beta)} \stackrel{\alpha \neq \beta \rightarrow \alpha - \beta \neq 0}{=} \\ = \alpha + \beta - \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha + \beta} = \\ = \frac{\cancel{\alpha^2} + 2\alpha\beta + \cancel{\beta^2} - \cancel{\alpha^2} - \alpha\beta - \cancel{\beta^2}}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

B₂.
$$A = x^2 - 3xy + y^2 = (\sqrt{7} + 2\sqrt{5})^2 - 3(\sqrt{7} + 2\sqrt{5})(\sqrt{7} - 2\sqrt{5}) + (\sqrt{7} - 2\sqrt{5})^2 = \\ = (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 - 3[(\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{5})^2] + (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 = \\ = 7 + 4\sqrt{35} + 4 \cdot 5 - 3(7 - 4 \cdot 5) + 7 + 4\sqrt{35} + 4 \cdot 5 = \\ = 7 + 20 - 3(7 - 20) + 7 + 20 = \\ = 27 - 3(-13) + 27 = \\ = 27 + 39 + 27 = \\ = 93$$

B₃. Αφού $0 < x < 2$ τότε:
$$\left\{ \begin{array}{ll} x + 1 > 0 & |x + 1| = x + 1 \\ x + 2 > 0 & \text{οπότε } |x + 2| = x + 2 \\ x - 2 < 0 & |x - 2| = -(x - 2) \end{array} \right\} (1)$$



$$\begin{aligned}\text{Άρα } A &= |x+1| + |x+2| + 2|x-2| \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \\ A &= x+1 + x+2 + 2[-(x-2)] \Rightarrow \\ A &= \cancel{2x} + 3 - \cancel{2x} + 4 \Rightarrow \\ \boxed{A=7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Αφού } 0 < x < 2 \Rightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ 3x > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ 3x > 0 \\ 2 \cdot (x-2) < 2 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ 3x > 0 \\ 2x-4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} x-2 < 0 \\ 3x > 0 \\ 2x-4-1 < 0-1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ 3x > 0 \\ 2x-5 < -1 \end{cases} \text{ οπότε} \\ \begin{cases} |x-2| = -(x-2) \\ |3x| = 3x \\ |2x-5| = -(2x-5) \end{cases} &\stackrel{(2)}{\Rightarrow}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Άρα } B &= |x-2| + |2x-5| + |3x| \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \\ B &= -(x-2) + [-(2x-5)] + 3x \Rightarrow \\ B &= \cancel{-x} + 2 - \cancel{2x} + 5 + \cancel{3x} \Rightarrow \\ \boxed{B=7}\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } A = B$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι:

$$\begin{aligned}\alpha &= (\sqrt{5}-1)^2 - (\sqrt{5}+1)^2 - 4(1-\sqrt{5}) + 5 \Rightarrow \\ \alpha &= (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 1 - \left[(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 1 \right] - 4 + 4\sqrt{5} + 5 \Rightarrow \\ \alpha &= \cancel{5} - 2\sqrt{5} + \cancel{1} - \cancel{5} - 2\sqrt{5} - \cancel{1} - 4 + 4\sqrt{5} + 5 \\ \alpha &= \cancel{-4\sqrt{5}} - 4 + \cancel{4\sqrt{5}} + 5 \Rightarrow \\ \boxed{\alpha=1}\end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \\ \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + 2\sqrt{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} &= \frac{\cancel{2\sqrt{2}\sqrt{6}} + 2(\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{6})^2 - \cancel{2\sqrt{6}\sqrt{2}}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} =\end{aligned}$$

$$= \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 6}{6 - 2} = \frac{4 + 12}{4} = \frac{16}{4} = 4 \text{ άρα } \boxed{\beta = 4}$$

Γ₂. Αφού $x \in [\alpha, \beta]$ με $\alpha = 1$ και $\beta = 4$ τότε $x \in [1, 4]$ δηλαδή:

$$1 \leq x \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \text{και} \\ x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ \text{και} \\ x - 4 \leq 0 \end{cases} \text{ οπότε } \begin{cases} |x - 1| = x - 1 \text{ (1)} \\ \text{και} \\ |x - 4| = -(x - 4) \text{ (2)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Τότε η } A &= |x - 1| - |x - 4| + 5 \xrightarrow{(1), (2)} A = x - 1 - [-(x - 4)] + 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = x - 1 + x - 4 + 5 \Rightarrow A = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Θεωρούμε την εξίσωση } \frac{4}{A-1} + \frac{2}{A+1} &= \frac{A^2+2}{A^2-1} \xrightarrow{A=2x} \\ &\Rightarrow \frac{4}{2x-1} + \frac{2}{2x+1} = \frac{(2x)^2+2}{(2x)^2-1} \Rightarrow \frac{4}{2x-1} + \frac{2}{2x+1} = \frac{4x^2+2}{(2x-1)(2x+1)} \text{ (3)} \end{aligned}$$

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} 2x-1 \neq 0 \\ \text{και} \\ 2x+1 \neq 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x \neq 1 \\ \text{και} \\ 2x \neq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ \text{και} \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ που ισχύει αφού } 1 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Τότε από (3)} &\xrightarrow{\text{ΕΚΠ}=(2x-1)(2x+1)} \frac{4}{(2x-1)(2x+1)} \cdot \frac{(2x+1)}{(2x+1)} + \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} \cdot \frac{(2x-1)}{(2x-1)} \\ &= \frac{4x^2+2}{(2x-1)(2x+1)} \Rightarrow 4(2x+1) + 2(2x-1) = 4x^2+2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 8x+4+4x-2 = 4x^2+2 \Rightarrow 12x-2 = 4x^2+2 \Rightarrow 4x-12x=0 \Rightarrow 4x(x-3)=0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 4x=0 \\ \text{ή} \\ x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \in [1,4] \text{ άρα ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ} \\ \text{ή} \\ \boxed{x=3} \in [1,4] \text{ ΔΕΚΤΗ} \end{cases} \end{aligned}$$

Γ₃. Ισχύει $\alpha \leq x \leq \beta \xrightarrow{(\Gamma_1)} 1 \leq x \leq 4 \xrightarrow{+2} 1+2 \leq x+2 \leq 4+2 \Rightarrow 3 \leq x+2 \leq 6 \text{ (4)}$

$$\begin{aligned} \text{Ισχύει } \alpha+1 \leq y \leq 2\beta &\xrightarrow{(\Gamma_1)} 1+1 \leq y \leq 2 \cdot 4 \xrightarrow{+(-1)} 2 \leq y \leq 8 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2-1 \leq y-1 \leq 8-1 \Rightarrow 1 \leq y-1 \leq 7 \text{ (5)} \end{aligned}$$

Η περίμετρος του ορθογώνιου είναι $\Pi = 2[(x+2)+(y-1)] \text{ (6)}$

$$\text{Από (4)+(5)} \Rightarrow 3+1 \leq (x+2)+(y-1) \leq 6+7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \leq (x+2)(y-1) \leq 13 \xrightarrow{-2 > 0} 2 \cdot 4 \leq 2[(x+2)(y-1)] \leq 2 \cdot 13 \xrightarrow{(6)} \Rightarrow \boxed{8 \leq \Pi \leq 26}$$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = (x+2)(y-1)$ (7)

Αφού όλοι οι όροι των (4) και (5) είναι θετικοί τότε από:

$$(4) \cdot (5) \Rightarrow 3 \cdot 1 \leq (x+2)(y-1) \leq 6 \cdot 7 \xrightarrow{(7)} \boxed{3 \leq E \leq 42}$$

Γ₄. Για $x \in [\alpha, \beta]$ δηλαδή για $x \in [1, 4]$ θεωρούμε την εξίσωση:

$$\left(\sqrt{x^2 - 2x + 1} - |x - 4| + 5 \right)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x-1)^2} - |x - 4| + 5 \right)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\left(|x - 1| - |x - 4| + 5 \right)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$A^2 = 9 \xrightarrow{(\Gamma_2)} \Rightarrow$$

$$(2x)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(2x)^2} = \sqrt{9} \Rightarrow$$

$$|2x| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x = -3 \\ \text{ή} \\ 2x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \notin [1, 4] \text{ άρα ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ} \\ \text{ή} \\ \boxed{x = \frac{3}{2}} \in [1, 4] \text{ άρα ΔΕΚΤΗ} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. α. $x^2 + y^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 = 3 + 1 + 3 + 1 = 8$

β. $\Pi = x^2 + y^2 + \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \xrightarrow{(a)} \Pi = 8 + \frac{x}{xy} - \frac{y}{xy} \Rightarrow$

$$\Pi = 8 + \frac{x-y}{xy} \Rightarrow \Pi = 8 + \frac{\sqrt{3}+1 - (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \Rightarrow$$

$$\Pi = 8 + \frac{\cancel{\sqrt{3}}+1 - \cancel{\sqrt{3}}+1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} \Rightarrow \Pi = 8 + \frac{2}{3-1} \Rightarrow \Pi = 8 + \frac{2}{2} \Rightarrow \Pi = 8 + 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Pi = 9}$$

γ. Από (α) ισχύει: $x^2 + y^2 = 8$ και $\begin{cases} x^2 = 8 - y^2 & (1) \\ y^2 = 8 - x^2 & (2) \end{cases}$

Τότε:

$$\begin{aligned}
 x^4 - 4y^2 + 36 &= x^4 - 4(8 - x^2) + 36 = x^4 + 4x^2 - 32 + 36 = \\
 &= x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 y^4 - 10x^2 + 105 &= y^4 - 10(8 - y^2) + 105 = y^4 - 80 + 10y^2 + 105 = \\
 &= y^4 + 10y^2 + 25 = (y^2 + 5)^2
 \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^4 - 4y^2 + 96} + \sqrt{y^4 - 10x^2 + 105} &= \sqrt{(x^2 + 2)^2} + \sqrt{(y^2 + 5)^2} = \\
 |x^2 + 2| + |y^2 + 5| &\stackrel{x^2+2>0}{=} \stackrel{y^2+5>0}{=} x^2 + 2 + y^2 + 5 = x^2 + y^2 + 7 \stackrel{(α)}{=} 8 + 7 = 15
 \end{aligned}$$

Δ2.

α.

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{1+\alpha} + \sqrt{1-\alpha} = \sqrt{1+\frac{2x}{x^2+1}} + \sqrt{1-\frac{2x}{x^2+1}} = \\
 &= \sqrt{\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}} + \sqrt{\frac{x^2+1-2x}{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \\
 &= \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{|x+1| + |x-1|}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} (|x+1| + |x-1|)
 \end{aligned}$$

β.

$$\begin{aligned}
 \text{Ισχύει } d(x, 0) < 1 &\Leftrightarrow |x-0| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \text{και} \\ x < 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ \text{και} \\ x-1 < 0 \end{cases} \text{ οπότε και } \begin{cases} |x+1| = x+1 & (1) \\ |x-1| = -(x-1) & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

i. Από (α) ερώτημα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} (|x+1| + |x-1|) \stackrel{(1), (2)}{\Rightarrow} A = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} [x+1 + [-(x-1)]] \Rightarrow \\
 A &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} (\cancel{x} + 1 + \cancel{x} + 1) \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}
 \end{aligned}$$

ii. Έστω ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\begin{aligned}
 A &> \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt{x^2+1} > \sqrt{2}\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \\
 2 &> \sqrt{2}\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 2^2 > (\sqrt{2}\sqrt{x^2+1})^2 \Leftrightarrow 4 > 2(\sqrt{x^2+1})^2 \Leftrightarrow \\
 2 &> x^2 + 1 \Leftrightarrow 2-1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > x^2 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{1} \Leftrightarrow |x| < 1
 \end{aligned}$$

που ισχύει από την υπόθεση.