

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Εισηγητής: Παπαδάκης Γιώργος

Ημερομηνία: 26/10/2025

ΘΕΜΑ Α

A1) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Η απόσταση ενός σημείου $A(\alpha, \beta)$ από τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι $|\beta|, |\alpha|$ αντίστοιχα.
- β.** Αν $\lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$ τότε είναι οπωσδήποτε $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$.
- γ.** Αν $A(-\alpha, \beta)$ και $\vec{AB} = (2\alpha, 2\beta)$, τότε οι συντεταγμένες του B είναι (α, β) .
- δ.** Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (4, 0)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 0° .
- ε.** Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίθετα διανύσματα με $\vec{\alpha} = -2\vec{i} + \kappa\vec{j}$ και $\vec{\beta} = \lambda\vec{i} - 2\vec{j}$ Τότε $\kappa = \lambda = 2$.

(μονάδες 10)

A2) Να αποδείξετε ότι: αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$.

(μονάδες 8)

A3) α) Πότε δύο διανύσματα λέγονται ίσα;

(μονάδες 3)

β) Τι ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης ενός διανυσματος $\vec{\alpha} = (x, y)$;

(μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

B1) Αν για τα σημεία A, B, Γ, O, M, ισχύει η σχέση:

$$2\vec{OB} + 3\vec{MB} = -4\vec{OM} - \vec{MG} + 6\vec{OA}$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

(μονάδες 10)

B2) Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και M, N τα μέσα των BΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\vec{AM} = \frac{\vec{AD} + 2\vec{AB}}{2}$

β) $\vec{AN} = \frac{2\vec{AD} + \vec{AB}}{2}$

γ) $\vec{AM} + \vec{AN} = \frac{3}{2}\vec{AG}$

(μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Το σημείο M(3,4) είναι το μέσο του τμήματος AB. Αν είναι A(1,2), τότε να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του B.

(μονάδες 6)

β) σημείο Γ του άξονα $x'x$ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά AB.

(μονάδες 7)

- Γ2) α) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{GB}$, ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ (μονάδες 6)
- β) Αν $\vec{x}$ είναι ένα διάνυσμα ώστε $2\vec{x} + 4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$, να εκφράσετε το $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ (μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1) Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x-2, -2)$ και $\vec{\beta} = (2y^2 - 6y + 5, x)$ είναι συγγραμμικά. (μονάδες 7)
- Δ2) Αν ισχύει η ισότητα $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB}$ τότε να αποδείξετε ότι : τα σημεία M, N συμπίπτουν. (μονάδες 7)
- Δ3) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Κ, Λ σημεία των ΑΒ, ΑΓ ώστε $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. Αν Μ είναι το μέσο της ΚΛ, τότε:
- α) να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ (μονάδες 5)
- β) να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{BM}$ και $\overrightarrow{GM}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ (μονάδες 6)

Ευχές για επιτυχία

ΘΕΜΑ Α

- A1.** α) Σωστό
β) Λάθος
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

A2. Θεωρία σχολικό σελ.38

- A3.** α) Θεωρία σχολικό σελ.13
β) Θεωρία σχολικό σελ.38

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι: $2\vec{OB} + 3\vec{MB} = -4\vec{OM} - \vec{MG} + 6\vec{OA}$

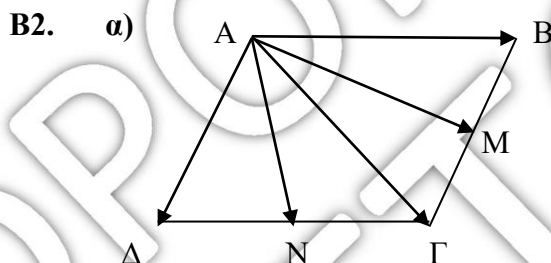
Με σημείο αναφοράς το Α έχουμε:

$$2(\vec{AB} - \vec{AO}) + 3(\vec{AB} - \vec{AM}) = -4(\vec{AM} - \vec{AO}) - (\vec{AG} - \vec{AM}) - 6\vec{AO} \Leftrightarrow$$

$$2\vec{AB} - 2\vec{AO} + 3\vec{AB} - 3\vec{AM} = -4\vec{AM} + 4\vec{AO} - \vec{AG} + \vec{AM} - 6\vec{AO} \Leftrightarrow$$

$$5\vec{AB} = -\vec{AG} \Leftrightarrow \vec{AG} = -5\vec{AB}$$

Άρα τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.



Επειδή το Μ είναι το μέσο του ΒΓ ισχύει :

$$\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AG}}{2} = \frac{\vec{AB} + (\vec{AB} + \vec{AD})}{2} = \frac{\vec{AD} + 2\vec{AB}}{2}$$

β) Επειδή το Ν είναι το μέσο του ΓΔ ισχύει :

$$\vec{AN} = \frac{\vec{AD} + \vec{AG}}{2} = \frac{\vec{AD} + (\vec{AB} + \vec{AD})}{2} = \frac{2\vec{AD} + \vec{AB}}{2}$$

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} \vec{AM} + \vec{AN} &= \frac{\vec{AD} + 2\vec{AB}}{2} + \frac{2\vec{AD} + \vec{AB}}{2} = \frac{\vec{AD} + 2\vec{AB} + 2\vec{AD} + \vec{AB}}{2} = \\ &= \frac{3(\vec{AD} + \vec{AB})}{2} = \frac{3}{2} \vec{AG} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Επειδή το σημείο Μ είναι το μέσο του ΑΒ ,ισχύουν:

$$3 = \frac{1+x_B}{2} \Leftrightarrow 6 = 1+x_B \Leftrightarrow x_B = 5$$

$$\text{και } 4 = \frac{2+y_B}{2} \Leftrightarrow 8 = 2+y_B \Leftrightarrow y_B = 6$$

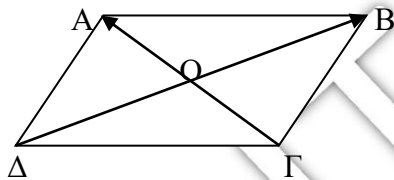
Άρα το σημείο Β έχει συντεταγμένες Β(5,6).

β) Έστω Γ(x_Γ , 0) , τότε :

$$\begin{aligned} \Gamma A &= \Gamma B \Leftrightarrow \sqrt{(x_A - x_\Gamma)^2 + (y_A - y_\Gamma)^2} = \sqrt{(x_B - x_\Gamma)^2 + (y_B - y_\Gamma)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(1 - x_\Gamma)^2 + 2^2} = \sqrt{(5 - x_\Gamma)^2 + 6^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x_\Gamma + x_\Gamma^2 + 4 = 25 - 10x_\Gamma + x_\Gamma^2 + 36 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8x_\Gamma = 56 \Leftrightarrow x_\Gamma = 7 \end{aligned}$$

Άρα Γ(7,0).

Γ2. Έχουμε



α)

- $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{\Gamma A} = \frac{1}{2}\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{\alpha} = \frac{1}{2}(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$
- $\vec{\Gamma \Delta} = \vec{BA} = -\vec{AB} = -\frac{1}{2}(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$
- $\vec{A\Delta} = \vec{OD} - \vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{BA} - \frac{1}{2}\vec{\Gamma A} = -\frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{\Gamma A} = -\frac{1}{2}\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}(\vec{\beta} + \vec{\alpha})$
- $\vec{\Gamma B} = \vec{\Delta A} = -\vec{A\Delta} = \frac{1}{2}(\vec{\beta} + \vec{\alpha})$

β) Έχουμε διαδοχικά

$$2\vec{x} + 4\vec{A\Delta} = \vec{AB} \Leftrightarrow 2\vec{x} = \vec{AB} - 4\vec{A\Delta} \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{1}{2}\vec{AB} - 2\vec{A\Delta} \Leftrightarrow$$

$$\vec{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) - 2\left[-\frac{1}{2}(\vec{\beta} + \vec{\alpha})\right] \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{1}{4}(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) + (\vec{\beta} + \vec{\alpha}) \Leftrightarrow$$

$$\vec{x} = \frac{1}{4}\vec{\beta} - \frac{1}{4}\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{5}{4}\vec{\beta} + \frac{3}{4}\vec{\alpha}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x-2, -2)$ και $\vec{\beta} = (2y^2 - 6y + 5, x)$ είναι συγγραμμικά ισχύει

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ 2y^2-6y+5 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(x-2) + 2(2y^2-6y+5) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4y^2 - 12y + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 12y + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (2y-3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x-1=0 \quad \text{και} \quad 2y-3=0$$

$$x=1$$

$$y=\frac{3}{2}$$

Δ2. Είναι:

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow$$

$$2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow$$

$$2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{NA}) = 3(\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow$$

$$2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) = 3(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM}) \Leftrightarrow$$

$$2\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NM} \Leftrightarrow$$

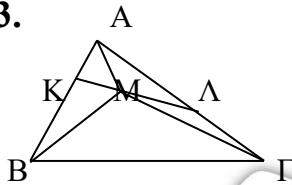
$$2\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow$$

$$5\overrightarrow{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{MN} = \vec{0}$$

Άρα τα σημεία M, N συμπίπτουν.

Δ3.



α) Στο τρίγωνο ΑΚΛ η ΑΜ είναι διάμεσος άρα:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A\Gamma}\right) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$$

β) Έχουμε

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}\right) = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$$

Και

$$\overrightarrow{ΓM} = \overrightarrow{ΓA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{A\Gamma} + \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}\right) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$$